ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۴، شماره ۳ (۱۳۹۸)، صص. ۷۱-۶۱
http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

مسئله مونتی هال

رامین کاظمی

چکیده. هدف این مقاله، معرفی مسئله مونتی هال به‌عنوان یکی از معماهای علم احتمال است. این معما براساس یک مسابقه تلویزیونی به نام "بیا معامله کنیم" طرح‌ریزی شده و نامش را از نام مجری اصلی این مسابقه، مونتی هال، گرفته است. برهان ریاضی این مسئله بر قانون احتمال کل و فرمول بیز استوار است. اولین برهان ریاضی مسئله که توسط آنتونی لو بِلو و آخرین برهان که توسط فرانسیسکو و همکاران ارائه شده‌اند، تحلیل می‌شوند. همچنین، بازی‌های گیلمن در انتقاد به راه حل ارائه شده توسط مرلین ووس ساوانت مرور می‌شوند. در پایان به کاربردهایی در فلسفه، فیزیک، اقتصاد و روان‌شناسی اشاره خواهد شد.

۱. مقدمه

مسئله مونتی هال یکی از معماهای علم احتمال است. این معما براساس یک مسابقه تلویزیونی به نام "بیا معامله کنیم" در آمریکا طرح‌ریزی شده و نامش را از نام مجری اصلی این مسابقه، مونتی هال، گرفته است. مسئله مونتی هال یا پارادوکس مونتی هال در زمره پارادوکس‌های حقیقی قرار دارد؛ با اینکه جواب مسئله نامکن به‌نظر می‌رسد اما در واقع درست است. این مسئله، در تفسیر معمول آن، معادل ریاضیاتی "مسئله سه زندانی" است و هر دوی این مسائل با "مسئله سه کارت" نیز مشابهت‌هایی دارند [۳]. این مسئله اولین بار در نامه‌ای از استیو اسلوین به "مجله آمارگر آمریکایی" در سال ۱۹۷۵ مطرح و به‌صورت زیر در ستون "از مرلین بپرس" در مجله پرید در سال ۱۹۹۰ منتشر شد:

مسئله مونتی هال. فرض کنید در یک مسابقه تلویزیونی شرکت کرده‌اید و میان سه در باید یکی را انتخاب کنید. پشت یکی از درها یک ماشین و پشت دو در دیگر دو بز است. شما یکی از درها را انتخاب می‌کنید (به‌طور مثال در شماره ۱). مجری برنامه که می‌داند پشت هر در چه چیزی قرار دارد، در دیگری را باز می‌کند (به‌طور مثال در شماره ۳) و به شما نشان می‌دهد که پشت در یک بز است. بعد از شما می‌پرسد که "می‌خواهید در شماره ۱ را با شماره ۲ تاخت بزنید؟" آیا به سود شما است که انتخاب خود را عوض کنید؟

مرلین ووس ساوانت که در کتاب رکوردهای جهانی گینس به‌عنوان شخصی با بالاترین آی‌کیو (IQ) معرفی شده است با پاسخ دادن به سئوالاتی در ستون "از مرلین بپرس" که در مجله پرید قرار داشت، مشهور شد. در پاییز سال ۱۹۹۰ او سوالی را که برای بررسی به مجله ارسال شده بود، پاسخ داد. این سوال همان مسئله مونتی هال بود که در بالا به آن اشاره شد. پاسخ مرلین ووس ساوانت این بود که شرکت‌کننده باید پیشنهاد مجری را بپذیرد زیرا احتمال وجود ماشین

عبارات و کلمات کلیدی. مسئله مونتی‌هال، قانون احتمال کل، فرمول بیز.
دبیر تخصصی: حمید پزشک
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۲
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.120123.1349

پشت هر یک از سه در مساوی است. بازیکنی که در شماره ۱ را انتخاب می‌کند شانس برنده شدنش ۱ به ۳ است. اما بازیکنی که در شماره ۱ را انتخاب می‌کند و بعد آن را با در شماره ۲ تعویض می‌کند، با شانس ۲ به ۳ برنده است زیرا مجری یکی از درهای انتخاب نشده را باز کرده و یکی از گزینه‌ها را باطل کرده است. بنابراین، شرکت‌کننده با تعویض انتخاب خود شانس برنده شدنش را دو برابر می‌کند. مرلین جدول زیر را برای تایید پاسخ خود ارائه کرد.

در شماره ۳	در شماره ۲	در شماره ۱
بز	بز	ماشین (تعویض و باخت)
بز	ماشین	بز (تعویض و برد)
ماشین	بز	بز (تعویض و برد)
بز	بز	ماشین (عدم تعویض و برد)
بز	ماشین	بز (عدم تعویض و باخت)
ماشین	بز	بز (عدم تعویض و باخت)

بسیاری از خوانندگان نمی‌پذیرند که تاخت زدن در چنین موقعیتی به سود شرکت‌کننده است. پس از اینکه مسئله در مجله پرید مطرح شد تعداد ده هزار خواننده که هزار نفر آنها دارای مدرک پی‌اچ‌دی بودند به مجله نامه نوشتند و اظهار کردند که پاسخ ساوانت درست نیست. حتی با وجود ارائه توضیحات، شبیه‌سازی موقعیت و اثبات‌های ریاضی، بسیاری با جواب او متقاعد نشدند. آندرو واسونی توضیح می‌دهد که او نتوانست پُل اِردوش، یکی از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان تاریخ، را تا زمان مشاهده شبیه‌سازی کامپیوتری متقاعد به پذیرش این پاسخ کند. نقاط مبهمی در صورت این مسئله وجود دارد. روشن نیست که مجری همیشه درِ دیگری را باز می‌کند یا نه، پیشنهاد عوض کردنِ در را می‌دهد یا نه و امکان دارد دری را باز کند که ماشین پشت آن است یا نه؟ تلقی عمومی از مسئله به این صورت است که مجری همواره یکی از درهای انتخاب نشده را باز می‌کند، دری که مجری باز می‌کند پوچ است و همیشه به شرکت‌کننده پیشنهاد می‌کند در انتخابش تجدیدنظر کند. اغلب فرض می‌کنند که ماشین به‌طور تصادفی پشت یکی از درها قرار گرفته و لذا انتخاب مجری کاملاً تصادفی است (که در حالتی که شرکت‌کننده گزینه درست را انتخاب کرده باشد، اتفاق می‌افتد). برخی نیز معتقد هستند که انتخاب اولیه شرکت‌کننده تصادفی است.

۲. مباحثه‌ای ریاضی در مجله پرید

مطالب زیر که در تایید پاسخ مرلین است در سال ۱۹۹۱ توسط آنتونی لو بِلو منتشر شده است [۲]. فرض کنید برای $i = ۱,۲,۳$، C_i بیانگر پیشامد قرار داشتن ماشین پشت در i باشد. در این صورت،

$$P(C_i) = \frac{۱}{۳},\ i = ۱,۲,۳.$$

بدون کاستن ار کلیت مسئله، فرض کنید شرکت‌کننده اولین در را انتخاب کند. توجه کنید که مجری بی‌طرف نیست، او متعصبانه رفتار کرده و همیشه یک در که منجر به باخت می‌شود را باز می‌کند. فرض کنید R پیشامد این باشد که مجری

مغرضانه در شماره ۳ را باز کند. در این صورت، قانون احتمال کل نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|C_۱)P(C_۱) + P(R|C_۲)P(C_۲) + P(R|C_۳)P(C_۳) \\ &= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \times ۱ + \frac{۱}{۳} \times ۰ \\ &= \frac{۱}{۲}, \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $P(A|B)$ احتمال شرطی پیشامد A به‌شرط پیشامد B است. بنابر تعریف احتمال شرطی،

$$P(C_۱|R) = \frac{P(R|C_۱)P(C_۱)}{P(R)},$$
$$P(C_۲|R) = \frac{P(R|C_۲)P(C_۲)}{P(R)}.$$

با جایگذاری احتمال‌ها،

$$P(C_۱|R) = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳},$$
$$P(C_۲|R) = \frac{۱ \times \frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۳}.$$

این نتایج دقیقاً منطبق بر پاسخ مرلین ووس ساوانت است. اگر $G_۳$ پیشامد قرار داشتن یک بز پشت در شماره ۳ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} P(C_۱|G_۳) &= \frac{P(G_۳|C_۱)P(C_۱)}{P(G_۳)} \\ &= \frac{\frac{۱}{۳} \times ۱}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲}, \\ P(C_۲|G_۳) &= \frac{P(G_۳|C_۲)P(C_۲)}{P(G_۳)} \\ &= \frac{\frac{۱}{۳} \times ۱}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲}. \end{aligned}$$

۳. بازی‌های گیلمن

مرلین راه حلی مختصر برای مسئله مونتی هال ارائه کرد که توسط خود او در دو یادداشت بعدی کامل شد [۱۳، ۱۴، ۱۵]. در این بخش، بازی‌های گیلمن در ارتباط با مسئله مونتی هال معرفی می‌شوند. گیلمن [۷، ۸] راه حل مرلین را به چالش کشید و استدلال کرد که او به‌طور ضمنی نسخه اصلاح شده‌ای از بازی را در نظر گرفته است و بنابراین راه حل کاملی ارائه کرد. دو بازی او تحت عنوان بازی I و بازی II در زیر آمده است:

بازی I. فرض کنید در شماره ۱ انتخاب شده است. مجری که می‌داند ماشین کجا است یکی از دو در دیگر را برای نشان دادن یک بز باز می‌کند و شما را دعوت به تعویض انتخابتان می‌کند البته اگر بخواهید. فرض کنید او در شماره ۳ را باز کند. آیا شما باید نظرتان را به در شماره ۲ تغییر دهید؟

فرض کنید p احتمال برنده شدن با تعویض باشد به‌شرط اینکه مجری در شماره ۳ را باز کند. این یک احتمال شرطی است. وقتی ماشین واقعاً پشت در شماره ۲ است مجری در شماره ۳ را باز خواهد کرد. اما وقتی ماشین پشت در شماره

۱ است او ممکن است در شماره ۲ یا شماره ۳ را باز کند. پاسخ به این سئوال وابسته به استراتژی انتخاب است. فرض کنید q احتمال این باشد که او در شماره ۳ را باز خواهد کرد. مرلین این حالت را مد نظر قرار نداده است. فرض کنید H_j پیشامد باز کردن در شماره j توسط مجری باشد. با این نمادگذاری، احتمال شرطی برنده شدن با تعویض برابر با $p = P(C_۲|H_۳)$ است که مقدارش به احتمال شرطی $q = P(H_۳|C_۱)$ وابسته است. بنابراین، احتمال p می‌تواند هر عددی بین ۱/۲ و ۱ باشد. فرض کنید $q = ۱$. باز کردن در شماره ۳ هیچ اطلاعی به شما نمی‌دهد و $p = ۱/۲$. در حالت $q = ۰$، مجری در شماره ۳ را باز می‌کند تنها وقتی ماشین پشت در شماره ۲ باشد و $p = ۱$.
بازی II. شانس اینکه ماشین دقیقاً پشت در شماره ۱ باشد برابر با ۱/۳ است و در این حالت شما بازی را خواهید باخت وقتی تعویض کنید. شانس اینکه ماشین یا پشت در شماره ۲ (در این حالت مجری بناچار در شماره ۳ را باز می‌کند) یا پشت در شماره ۳ (در این حالت او بناچار در شماره ۲ را باز می‌کند) باشد برابر با ۲/۳ است. در این موارد، نشان دادن یک بز توسط مجری نشان می‌دهد شما چگونه تعویض کنید و برنده شوید. این یک برهان ظریف است اما به مسئله مطرح شده در حالتی که مجری به شما یک بز را پشت در شماره ۳ نشان می‌دهد، اشاره نمی‌کند. در مقابل، هنوز امکان اینکه ماشین پشت در شماره ۳ باشد را مورد توجه قرار می‌دهد زیرا مجری نمی‌تواند قبلاً در را باز کرده باشد. در این بازی شما نیازمند آگاهی_ قبل از اینکه یک در باز شود_ هستید که آیا برنامه‌ای برای تعویض دارید؟

وقتی $q = ۱/۲$، مجری بین دو در موجود تفاوتی قائل نمی‌شود و شما به‌طور کلی در حال بازی II هستید. در حقیقت، وقتی ماشین پشت در شماره ۱ است مجری در شماره ۳ را باز می‌کند (یک بار از دو بار). وقتی مجری واقعاً در شماره ۳ را باز می‌کند، ماشین پشت در شماره ۲ است (دو بار از سه بار) و این یعنی $p = ۲/۳$. به‌طور کلی اگر $q = m/n$، آنگاه $p = \frac{n}{m+n}$. بنابراین، برای هر qی گویا،

$$p = \frac{۱}{۱+q}. \qquad (۲)$$

بنابر فرمول بیز، رابطه (۲)، برای هر $۰ \le q \le ۱$ و حقیقی برقرار است. توجه کنید این نابرابری بر این دلالت دارد که

$$\frac{۱}{۲} \le p \le ۱.$$

با نمادگذاری پیشین $q = P(H_۳|C_۱)$ و $p = P(C_۲|H_۳)$، از فرمول بیز نتیجه می‌شود که

$$P(H_۳)P(C_i|H_۳) = P(C_i)P(H_۳|C_i). \qquad (۳)$$

طرفین رابطه (۳) برابر با $P(H_۳ \cap C_i)$ هستند. در حالت کلی، احتمال‌های $P(C_i)$ ممکن است برای هر i برابر نباشند اما $P(H_۳)$ هنوز مستقل از i است. در نتیجه، می‌توان H را به جای $H_۳$ قرار داد. در نهایت،

$$P(C_i|H_۳) \sim P(C_i)P(H_۳|C_i).$$

وقتی $P(C_i)$ها برابر باشند،

$$P(C_i|H_۳) \sim P(H_۳|C_i).$$

در حالت $q = ۱/۲$،

$$P(H_۳|C_۲) = ۱,$$
$$P(H_۳|C_۱) = q = ۱/۲.$$

بنابراین،

$$p = P(C_۲|H_۳) = \frac{۲}{۳}.$$

به‌طور کلی برای هر q،

$$p = \frac{۱}{۱+q}.$$

فرض کنید A پیشامد برنده شدن بازی II با تعویض باشد. در این صورت،

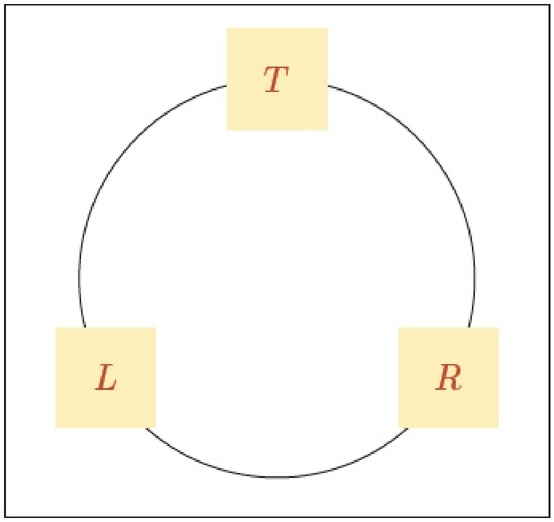
$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_۳ \cap C_۲) + P(H_۲ \cap C_۳) \\ &= P(C_۲)P(H_۳|C_۲) + P(C_۳)P(H_۲|C_۳) \\ &= \frac{۱}{۳} \times ۱ + \frac{۱}{۳} \times ۱ \\ &= \frac{۲}{۳}. \end{aligned}$$

۴. مدل‌بندی جدید

مسئله مونتی هال یک عبارت ساده را با جواب‌هایی که برای اکثر مخاطبان شگفت‌آور به‌نظر می‌رسد، ترکیب می‌کند. این مسئله بیش از دو دهه پیش حل شده است. با این حال، بحث‌های اخیر نشان می‌دهد که راه حل به‌صورت ناقص درک شده است. در ادامه، در مورد مشکلات و جنبه‌های دیگر مسئله که باعث می‌شوند موضوع جالب‌تر به‌نظر برسد، بحث می‌کنیم. با این وجود، به‌منظور شفاف‌سازی مقالات گیلمن مطالب زیر ارائه می‌شود. از طرفی، مثال‌های فراوانی در کتاب‌های بِن‌نعیم [۳] و میلر [۱۰] وجود دارد.

تحلیل اخیر که در زیر به آن اشاره می‌شود توسط فرانسیسکو و همکاران در سال ۲۰۱۹ ارائه شده است [۶]. قواعد بازی به‌صورت زیر در شکلی ساده بیان می‌شوند. مونتی هال سه جعبه دربسته را به یک شرکت‌کننده نشان می‌دهد–او را پورتیا بنامید. یکی از آنها حاوی یک ماشین است، در حالی که یک بز درون هر یک از دو جعبه دیگر قرار داد. جعبه‌ها به‌صورت متقارن در اطراف یک مسیر دایره‌ای قرار می‌گیرند که می‌توانند آزادانه در اطراف مرکز آن بچرخند. پورتیا یکی از جعبه‌ها را انتخاب می‌کند و گردونه بلافاصله چرخانده می‌شود؛ همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است.

مونتی هال می‌داند ماشین کجا است. او یکی از دو جعبه در پایین شکل را باز می‌کند–صراحتاً جعبه L– برای نشان دادن پورتیا که حاوی یک بز است، و از او سؤال می‌کند که آیا او می‌خواهد انتخاب خود را نهایی کند یا به جعبه R تغییر دهد. فرض کنید P_R احتمال این باشد که پورتیا در صورت تعویض، برنده ماشین شود. بازی گیلمن I از قوانین بخش ۳ پیروی می‌کند.



شکل۱. مواضع سه جعبه پس از اینکه شرکت‌کننده انتخاب اولیه خود را اعلام کند. گردونه به گونه‌ای چرخانده می‌شود که جعبه انتخاب شده در قسمت بالا قرار گیرد (T). دو جعبه دیگر در موقعیت‌هایی با برچسب L و R قرار دارند.

۱.۴. بازی گیلمن I. گیلمن ادعا می‌کند که بیان کامل بازی مستلزم آگاهی از شگردهای مونتی هال است. مجری از آزادی برخوردار است. اگر ماشین در جعبه $L(R)$ در شکل ۱ قرار داشته باشد، تنها گزینه وی باز کردن در جعبه $R(L)$ است. اگر ماشین در جعبه T قرار داشته باشد، ممکن است مجری هر دو در را باز کند. فرض کنید q احتمال این باشد که او در جعبه L را باز خواهد کرد. پورتیا برای محاسبه شانس‌اش، باید q را بداند. فرض کنید که او q را می‌داند. دو وضعیت $q = ۰$ و $q = ۱$ را در نظر بگیرد. با $q = ۰$، مونتی هال در جعبه R را باز خواهد کرد. با باز کردن در L، او در عمل به پورتیا نشان می‌دهد که چاره‌ای ندارد به این معنی که ماشین باید پشت در جعبه R است. بنابراین، در این حالت احتمال برنده شدن با تعویض، $P_R = ۱$ است. در مقابل، با $q = ۱$، اگر ماشین در جعبه T باشد مونتی هال جعبه L را باز خواهد کرد. اگر ماشین در جعبه R باشد او جعبه L را نیز باز خواهد کرد. از این‌رو، تنها اطلاعی که هنگام باز شدن به پورتیا منتقل می‌شود این است که جعبه L حاوی یک بز است. به‌عبارت دیگر، برای $q = ۱$، $P_R = ۱/۲$. واضح است که احتمال برنده شدن به q بستگی دارد. برای رسیدن به نتیجه‌گیری مشابه از منظری دیگر، احتمال پیروزی بدون تعویض را در نظر بگیرید. واضح است $P_T = ۱ - P_R$. قبل از اینکه مونتی هال در را باز کند، احتمال $P_T = ۱/۳$ است. هنگامی که او در جعبه L را باز می‌کند، یک امکان حذف می‌شود. اما اگر جعبه‌های L و R معادل باشند، P_T تغییر نمی‌کند. یعنی، مونتی هال نسبت به هر جعبه بی‌طرف است که معادل $q = ۱/۲$ است. حال، نتیجه می‌گیریم که با $q = ۱/۲$ احتمال برنده شدن با عدم تعویض، $P_T = ۱/۳$ است و احتمال برنده شدن با تعویض $P_R = ۲/۳$ است. بنابراین، با $q = ۱/۲$ استدلال ساوانت به‌کار گرفته می‌شود و احتمال برنده شدن با تعویض $P_R = ۲/۳$ است [۱۳، ۱۴، ۱۵]. واضح است که ووس ساوانت بازی بی‌طرفانه را به‌عنوان حالت خاص بازی گیلمن I در نظر گرفته است. گیلمن استدلال کرد که او بازی دیگری را در ذهن داشته است. این تفسیر حتی اگر راه حل وی برای بازی دوم گیلمن اعمال شود، ناعادلانه به‌نظر می‌رسد.

۲.۴. بازی گیلمن II. در نسخه دوم بازی، پورتیا باید تصمیم خود را برای تعویض یا عدم تعویض قبل از باز شدن در جعبه توسط مونتی هال اعلام کند. آگاهی از تعصب مجری به پورتیا کمک نخواهد کرد زیرا او باید قبل از اینکه مونتی

هال جعبه را باز کند تصمیم خود را بگیرید. در این حالت، استدلال ساوانت بی عیب و نقص است زیرا انتخاب پورتیا نمی‌تواند روی احتمال تأثیر بگذارد. بنابراین، احتمال اینکه پورتیا با تعویض برنده شود برابر با ۲/۳ است.

۵. تحلیل فرانسیسکو و همکاران

در این قسمت به ارائه برهان‌های ریاضی برای مطالب شهودی مطرح شده در بخش‌های ۳ و ۴ می‌پردازیم [۶].

۱.۵. بازی I. راه حل اول:
به احتمال قرار داشتن ماشین در جعبه $i(i = L, R)$ به‌شرط اینکه مونتی هال جعبه $j(j = L, R)$ را باز کند، توجه کنید. به‌عبارت دیگر، به احتمال شرطی $P(C_j|H_i)$ توجه کنید که در آن C_j پیشامد j (قرار داشتن ماشین در جعبه j) و H_i پیشامد i (باز کردن جعبه i توسط مونتی هال) است. وقتی پورتیا می‌داند ماشین در جعبه T است، احتمال اینکه مونتی هال جعبه R را باز کند برابر با

$$P(H_R|C_T) = q \tag{۴}$$

است. از فرمول بیز نتیجه می‌شود که

$$P(H_R)P(C_L|H_R) = P(C_L)P(H_R|C_L) \tag{۵}$$

و

$$P(H_R)P(C_T|H_R) = P(C_T)P(H_R|C_T). \tag{۶}$$

احتمال‌های پیشین اینکه ماشین در جعبه L یا جعبه T باشد، یکسان است. یعنی،

$$P(C_L) = P(C_T) = \frac{۱}{۳}.$$

معادله‌های (۶) و (۵) نشان می‌دهند که،

$$\frac{P(C_L|H_R)}{P(C_T|H_R)} = \frac{P(H_R|C_L)}{P(H_R|C_T)}. \tag{۷}$$

به‌علاوه، $P(H_R|C_L) = ۱$ زیرا مونتی هال مجبور است جعبه R را باز کند وقتی ماشین در جعبه L است. از معادله (۴) و (۷) نتیجه می‌شود که،

$$\frac{P(C_L|H_R)}{P(C_T|H_R)} = \frac{۱}{q}. \tag{۸}$$

وقتی مونتی هال در جعبه R را باز می‌کند، او به پورتیا می‌گوید که ماشین در جعبه T یا در جعبه L است. این نشان می‌دهد که مجموع عبارات در صورت و مخرج سمت راست رابطه (۸) برابر با یک است. یعنی،

$$P(C_L|H_R) + P(C_T|H_R) = ۱. \tag{۹}$$

حل دستگاه معادلات (۸) و (۹) نتیجه می‌دهد که،

$$P(C_L|H_R) = \frac{۱}{q + ۱}. \tag{۱۰}$$

وقتی مونتی هال بی‌طرف است، $q = ۱/۲$ و احتمال برابر با ۲/۳ است همان‌طوری که ووس ساوانت پیش‌بینی کرده بود.

راه حل دوم:
حال از ایساک [۹] برای نمایش یک حل بدیل که جذاب‌تر به‌نظر می‌رسد استفاده می‌کنیم زیرا با بررسی فضای $\mathcal{S}$ از پیشامدهای ممکن شروع می‌شود. فرض کنید برای $i = T, L, R$، C_i بیانگر پیشامد قرار داشتن ماشین در جعبه i باشد. فرض کنید برای $k = L, R$، S_k بیانگر پیشامد تغییر نظر پورتیا به جعبه k باشد. همچنین، فرض کنید W بیانگر پیشامد برنده شدن پورتیا و L بیانگر پیشامد باختن او (برنده شدن یک بز) باشد. بنابراین، پیشامدهای C_R و S_L ناسازگار هستند. اگر ماشین پشت در R باشد، آنگاه مونتی هال مجبور است در L را باز کند و پورتیا تمایل به باز کردن جعبه ندارد زیرا او باید یک بز برنده شود. فضای نمونه شامل چهار پیشامد

$$\mathcal{S} \quad = \quad \{(C_T, S_R, L), (C_T, S_L, L), (C_L, S_L, W), (C_R, S_R, W)\} \tag{۱۱}$$

است. می‌توان احتمال هر پیشامد در $\mathcal{S}$ را محاسبه کرد. هر پیشامد C_i برای $i = T, L, R$ با احتمال ۱/۳ رخ می‌دهد. به‌شرط اینکه ماشین در جعبه T باشد پیشامد (C_T, S_R, L) تنها زمانی رخ می‌دهد که مجری باز کردن جعبه L را انتخاب کند. بنابراین، احتمال آن برابر با $\frac{۱}{۳}(۱ - q)$ است. به‌طور مشابه، پیشامد (C_T, S_L, L) تنها زمانی رخ می‌دهد که مجری جعبه R را باز کند. احتمال این پیشامد برابر با $\frac{۱}{۳}q$ است. در نهایت، دو پیشامد آخر که مستقل از طرفداری و تعصب مونتی هال هستند، هر کدام دارای احتمال ۱/۳ هستند. وقتی مجری در جعبه R را باز می‌کند (پیشامد H_R)، پورتیا اولین و آخرین پیشامد در سمت راست (۱۱) را غیرمحتمل می‌انگارد. در این صورت، او شانس برنده شدن خود را به دو پیشامد دیگر تغییر می‌دهد:

$$P_{S_L|H_R} = \frac{۱/۳}{q/۳ + ۱/۳}. \tag{۱۲}$$

این احتمال منجر به

$$P_{S_L|H_R} = \frac{۱}{۱ + q} \tag{۱۳}$$

خواهد شد که در رابطه (۱۰) به آن رسیدیم.

۲.۵. بازی II. بازی گیلمن II متفاوت از بازی گیلمن I است. مانند بازی I، پورتیا یک جعبه را انتخاب می‌کند که بی‌درنگ به سمت وضعیت بالا حرکت می‌کند همان‌طوری که در شکل ۱ نشان داده شده است. در این صورت، مونتی هال یک بز را درون یکی از دو جعبه در پایین شکل ۱ به او نشان می‌دهد. بعد از این اتفاق، قبل از باز شدن در هر جعبه‌ای، مونتی هال از پورتیا می‌پرسد که آیا او به انتخاب جعبه دیگر تغییر عقیده می‌دهد. اگر پورتیا تصمیم به تغییر بگیرد، شانس برنده شدن ماشین چقدر است؟
راه حل اول:
فرض کنید برای $i = T, L, R$، C_i بیانگر پیشامد قرار داشتن ماشین در جعبه i باشد. داریم $P(C_i) = ۱/۳$. فرض کنید $P(W|C_i)$ احتمال برنده شدن پورتیا با تعویض باشد هرگاه ماشین در جعبه i باشد. احتمال برنده شدن با تعویض به‌صورت

$$P(W) \quad = \quad P(W|C_T)P(C_T) + P(W|C_L)P(C_L) + P(W|C_R)P(C_R) \tag{۱۴}$$

است. اگر ماشین در جعبه T باشد، تعویض باعث شکست پورتیا می‌شود. در نتیجه، $P(W|C_T) = ۰$. او می‌داند که در این حالت احتمال اینکه مونتی هال جعبه R (یا جعبه L) را انتخاب کند برابر با $q(۱ - q)$ است اما این اطلاع هیچ کمکی نمی‌کند زیرا در هر صورت احتمال برنده شدن صفر است. از سویی دیگر، $P(W|C_L) = ۱$. زیرا اگر ماشین در

جعبه L باشد مونتی باید جعبه R را باز کند و پورتیا مجبور خواهد شد که انتخاب درست را انجام دهد؛ یعنی جعبه L را باز کند. به‌طور مشابه، $P(W|C_R) = ۱$. از معادله (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$P(W) = ۰ \times \frac{۱}{۳} + ۱ \times \frac{۱}{۳} + ۱ \times \frac{۱}{۳}, \qquad (۱۵)$$

یعنی،

$$P(W) = \frac{۲}{۳}. \qquad (۱۶)$$

با یک مقایسه، اگر پورتیا مصمم به انتخاب اولیه خود باشد، احتمال $P(W|C_T)$ برابر با یک خواهد بود در حالی‌که

$$P(W|C_L) = P(W|C_R) = ۰.$$

در این صورت، معادله (۱۵) نتیجه می‌دهد که $P(W) = \frac{۱}{۳}$.

راه حل دوم:

مجدداً فرض کنید از ایساک [۹] پیروی کرده و به چهار پیشامد ممکن نیز توجه کنیم. فضای نمونه مجدداً همان فضای نمونه‌ای بیان شده در (۱۱) است و احتمال هر پیشامد همانی است که قبلاً محاسبه شد؛ یعنی احتمال $(۱-q)/۳$ برای (C_T, S_R, L)، $q/۳$ برای (C_T, S_L, L)، $۱/۳$ برای (C_L, S_L, W) و (C_R, S_R, W). در یکی از دو پیشامد آخر، پورتیا ماشین را رانندگی خواهد کرد. احتمال برنده شدن با تعویض مجموع دو احتمال است و مجدداً به رابطه (۱۶) خواهیم رسید.

معادله (۱۶) منطبق بر نتایج به‌دست آمده در [۱۳، ۱۴، ۱۵] است. این بدان معنی نیست که ووس ساوانت بازی II را انجام داده است. همان‌طور که قبلاً بیان شد همه شواهد نشان می‌دهد که او به بازی I با $q = ۱/۲$ توجه کرده است؛ یعنی، بازی با یک مجری بی‌طرف را مد نظر قرار داده است. تحت آن شرایط، معادله‌های (۱۰) و (۱۳) معادل با معادله (۱۶) هستند.

در زمان بررسی بازی I در بالا فرض کردیم که مونتی هال در جعبه R را باز کرده است و محاسبه احتمال بر این فرض استوار بود. اگر بازی نه یک بار بلکه چندین بار انجام شود، نمی‌توان فرض کرد که جعبه R هر بار باز می‌شود. در یک سری از بازی‌های طولانی، تعصب مجری بی‌ربط خواهد بود. همان‌طور که در بحث زیر نشان داده می‌شود، تمایز بین بازی‌های I و II روشن می‌شود.

در یک دنباله طولانی، ماشین در ۱/۳ از رویدادها در جعبه T قرار خواهد گرفت. در آن رویدادها، مونتی هال روش خود را دارد. اینکه آیا او یکی از درها را ترجیح داده یا نداده است، کاملاً غیرمادی است. با این حال، در صورت تصمیم‌گیری برای تعویض، پورتیا یک بز را به خانه می‌برد. البته اگر او نسبت به یکی از درها متعصبانه رفتار کند، پورتیا بیشتر اوقات بز را در جعبه دیگر می‌برد، اما این برای او هیچ ارزشی نخواهد داشت.

در ۲/۳ از رویدادهای دیگر، این ماشین یا در جعبه R یا جعبه L قرار خواهد گرفت. در این صورت، تصمیم پورتیا برای تعویض، یک ماشین جدید را به دارایی‌های وی اضافه می‌کند. شانس برنده شدن در تعویض ۲/۳ است دقیقاً مثل اینکه مونتی هال و پورتیا بازی II را انجام داده‌اند.

۶. چند کاربرد

مسئله مونتی هال نه تنها مورد توجه و علاقه ریاضی‌دانان و آماردانان است بلکه خود را به‌عنوان موضوعی جذاب و کاربردی برای سایر رشته‌ها نیز معرفی کرده است. در ادامه، به کاربرد این مسئله در فلسفه، فیزیک، اقتصاد و علوم شناختی و روان‌شناسی اشاره خواهیم کرد.

۱.۶. فلسفه. فیلسوفان ارتباط بین مسئله مونتی هال و مسائل مختلف دیرینه را در رشته خود یافته‌اند [۱۱]. یکی از این مسائل دیرینه که روزنهاوس به آن اشاره دارد، احتمال تک‌حالتی است. احتمال‌های تک‌حالتی به‌عنوان ساختارهای منطقی و نه واقعیت‌های فیزیکی که در آن عبارات احتمالی مستقیماً برای پیشامدهای تکی اعمال می‌شود، تصور می‌شوند [۱]. پیتر، استاد فلسفه، بیان می‌کند که احتمال تک‌حالتی که توسط پوپر ابداع شده است را می‌توان با استفاده از مسئله مونتی هال تعبیر کرد. باومن اساساً اظهار داشت که پاسخی برای این سؤال که یک بازیکن منطقی چه تصمیمی باید در يك حالت ایزوله بگیرد، وجود ندارد. او بیان داشت که حداقل هیچ پاسخ احتمالی وجود ندارد [۱]. وی استدلال می‌کند برای ارائه پاسخ باید یک سری بازی وجود داشته باشد. به‌عبارت دیگر، نگاه کردن به یک حالت واحد از نظر اینکه شرکت کننده باید تصمیم خود را تغییر دهد یا خیر، کاری منطقی نیست.

۲.۶. فیزیک. در حوزه‌های مختلف، فیزیکدانان نسخه مکانیک کوانتومیِ مسئله مونتی هال را ابداع کرده‌اند. در [۵] آنها بخش‌هایی از مسئله و از جمله جوایز، شرکت کننده در مسابقه و انتخاب جعبه را کوانتومی کرده‌اند. آنها با قرار دادن متغیر کوانتومی اصلی، موقعیت جایزه، در یک فضای ۳ بُعدیِ H که آن را فضای بازی می‌نامند، تحلیل را ارائه می‌کنند. بنابراین، باز کردن در مطابق با اندازه‌گیری در طول یک تصویر یک بُعدی روی H است. در این حالت، بازی با نسخه کلاسیک مسئله مونتی هال مشابهت دارد.

۳.۶. اقتصاد. اقتصاددانان اهمیت مسئله مونتی هال را با مشکلات تصمیم‌گیری انسان در محیط‌های رقابتی مقایسه کرده‌اند. در [۱۲] ادعا می‌شود که عدم موفقیت در تصمیم‌گیری‌ها همگی ریشه یکسان دارند. تصمیم گیرندگان رقابتی تمایل دارند که تمام اطلاعات مورد نیاز برای حل یک مسئله را به‌درستی در نظر نگیرند. آنها با استفاده از آنچه اقتصاددانان آن را تجزیه و تحلیل پروتکل می‌نامند، نشان می‌دهند که تصمیم گیرندگان رقابتی تمایل دارند تا روی اهداف خود و محرومیت سایر احزاب در مسئله مونتی هال قوانین بازی و تعامل بین طرفین تمرکز کنند.

۴.۶. علوم شناختی و روان‌شناسی. روان‌شناسان و دانشمندان علوم شناختی نیز به مسئله مونتی هال علاقه‌مند هستند. آنها سعی کرده‌اند دقیقاً مشخص کنند چرا مردم در درک این مسئله بسیار مشکل دارند [۱۱]. آزمایش‌های بی‌شماری در رابطه با تعامل انسان با مسئله مونتی هال و معضلی که آنها هنگام پیدا کردن گزینه تعویض یا عدم تعویض انتخاب اصلی خود پیدا می‌کنند، انجام شده است. در یک مطالعه خاص، برنز و ویت [۴] دریافتند که حدود ۱۴/۵ درصد از شرکت کنندگان در مطالعه، در صورت امکان این فرصت را انتخاب کردند.

مراجع

[1] P. Baumann, Single-case probabilities and the case of Monty Hall: Levy's View, *syntheses,* 162 (2008) 265–273.

[2] A. L. Bello, Ask Marilyn: the mathematical controversy in Parade Magazine, *Parade* (1990) 275–276.

[3] A. Ben-Naim, *Discover Probability*, World Scientific, New Jersey, (2015).

[4] B. Burnsand and M. Wieth, The collider principle in casual reasoning: why the Monty Hall Problem is so hard, *Journal of experimental psychology*, 103 (2004) 436–449.

[5] G. M. D'Arioano, R. D. Gill, M. Keyl, R. F. Werner, B. Kummer and H. Maassen, The quantum Monty Hall problem, *Quantum information and computation*, 2 (2002) 355–366.

[6] A. B. Francisco, Coutinho, Eduardo, Massad, CMath FIMA and Luiz, N. Oliveira, Monty Hall problem revisited once more, *Mathematics TODAY*, (2019) 24–26.

[7] L. Gillman, The car and goats, *Focus (MAA newsletter)*, 11(3) (1991) p. 8.

[8] L. Gillman, The car and the goats, *Amrican Mathematical Monthly*, 99(1) (1992) 3–7.

[9] R. Isaac, *The Pleasures of Probability*, Springer, Berlin (1995).

[10] S. J. Miller, *The Probability Lifesaver*, Princeton University Press, Princeton and Oxford (2017).

[11] J. Rosenhouse, *The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brain Teaser*. Oxford University Press, Inc., New York, New York (2009).

[12] A. Tor and M. Bazerman, Focusing failures in competitive environments: explaining decision errors in the Monty Hall game, the acquiring a company problem, and multiparty ultimatums, *Journal of behavioral decision making*, 16 (2003) 353–374.

[13] M. vos Savant, Ask Marilyn, *Parade*, (1990, 9 Sept) p. 22.

[14] M. vos Savant, Ask Marilyn, *Parade*, (1990, 9 Dec) p. 26.

[15] vos Savant, M. Ask Marilyn, *Parade*, (1991, 7 Jul) 26–29.

رامین کاظمی
گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران
r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

رامین کاظمی متولد شهریورماه ۱۳۵۷ در شهر دلفان است. وی در سال ۱۳۷۶ وارد مقطع کارشناسی رشته آمار دانشگاه رازی و در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته آمارریاضی در دانشگاه شهید بهشتی شد. در سال ۱۳۸۶ دوره دکتری در گرایش احتمال را در دانشگاه شهید بهشتی و تحت نظر دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل آغاز و در سال ۱۳۹۰ از رساله خود دفاع کرد. در حال حاضر، او دانشیار گروه آمار دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره) است.