ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۴، شماره ۳ (۱۳۹۸)، صص. ۶۰-۴۵

http://www.ui.ac.ir
نشریه علمی-ترویجی دانشگاه اصفهان
http://math-sci.iranjournals.ir

# حل و ساخت انواع جدول‌های سودوکو با استفاده از ابزارهای ریاضی

مصطفی داوطلب علیائی * و فاطمه قندی

**چکیده.** سودوکو جدولی است که امروزه یکی از سرگرمی‌های رایج در کشورهای مختلف جهان به‌شمار می‌آید و به‌عنوان یک ابزار بسیار مفید برای آموزش کودکان نیز به‌کار می‌رود. در این مقاله سعی بر آن داریم که به بررسی ارتباط میان ریاضیات و انواع جدول‌های سودکو بپردازیم. برای این منظور، ابتدا روشی بر مبنای برنامه‌ریزی صحیح در بهینه‌سازی برای حل جدول سودکو معمولی ارائه می‌دهیم. سپس این روش را برای حل چندین نوع مختلف دیگر از جدول سودکو توسیع می‌دهیم. در نهایت نیز با استفاده از تکنیک‌های ریاضی روش‌هایی را ارائه می‌دهیم که با کمک آنها قادر به ساخت جدول‌های سودکو خواهیم بود.

## ۱. مقدمه

سودوکو برای اولین بار در یک مجله پازل آمریکایی در سال ۱۹۷۹ انتشار یافت، ولی انتشار آن به‌طور مستمر برای نخستین مرتبه به ژاپن در سال ۱۹۸۶ برمی‌گردد. از سال ۲۰۰۵ این سرگرمی به محبوبیت جهانی دست یافت و نخستین مسابقه ملی آن در سال ۲۰۰۸ در فیلادلفیای آمریکا برگزار شد. در ایران نیز برای اولین بار در سال ۱۳۸۵ روزنامه همشهری اقدام به چاپ سودوکو به‌صورت روزانه کرد. جدول سودوکو انواع مختلفی دارد که در بخش‌های بعدی به معرفی برخی از آن‌ها می‌پردازیم. سودوکو مخفف یک عبارت ژاپنی به معنای "ارقام باید تنها باشند" است. در واقع رایج ترین سودوکو در فرم ماتریس ۹ $\times$ ۹ ظاهر می‌شود که در آن پر کردن ماتریس به‌گونه‌ای بایستی صورت پذیرد که هر سطر، ستون و زیرماتریس ۳ $\times$ ۳ از آن، دقیقا یکبار حاوی ارقام ۱ تا ۹ باشد. هر جدول با تعدادی معین از داده‌های از پیش تعیین شده ظاهر می‌شود، که به هر یک از این داده‌ها یک سرنخ گفته می‌شود. تعداد و محل سرنخ‌ها میزان سطح دشواری بازی را تعیین می‌کند. شکل ۱ مثالی از یک جدول سودوکو معمولی می‌باشد.

---

عبارات و کلمات کلیدی. جدول سودوکو، برنامه ریزی عدد صحیح دودویی، ماتریس جایگشتی.
دبیر تخصصی رابط: بیژن دواز
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۰۲

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 7 | | | | | 2 | |
| | 2 | | | | | 5 | | |
| | | | | | 3 | 4 | | |
| 2 | | | 1 | | | 3 | 4 | |
| 6 | 4 | | | 8 | | | 5 | 9 |
| | 9 | 5 | | | 2 | | | 1 |
| | | 3 | 4 | | | 8 | | |
| | | 9 | | | | | 1 | |
| | 1 | | | | | | | |

شکل ۱: مثالی از یک جدول سودوکو

در ارتباط با جدول سودوکو دو سؤال جالب می‌تواند در ذهن مخاطب نقش ببندد:

۱. چگونه می‌توان این جدول را با استفاده از تکنیک‌های ریاضی حل کرد؟

۲. چه تکنیک‌هایی از ریاضی را می‌توان برای ساخت این جدول استفاده کرد؟

در پاسخ به سوال اول در بخش ۲ این مقاله، ابتدا یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح دودویی (BILP)[۱] را برای حل جداول سودوکوی معمولی ارائه می‌دهیم. سپس در بخش ۳ مدل مذکور را برای حل چند نوع دیگری از جداول سودوکو توسیع می‌دهیم. در بخش ۴ این مقاله و در پاسخ به سوال دوم، به بررسی برخی روش‌های ساخت جدول سودوکو با استفاده از تکنیک‌های ریاضی می‌پردازیم. لازم بذکر است که تمامی مطالب بخش‌های این مقاله به جز زیر بخش ۵.۲ از مرجع [۲] و مطالب زیر بخش ۵.۲ نیز از مرجع [۱۳] اقتباس شده‌اند.

## ۲. حل جدول سودوکوی معمولی

**۱.۲. برنامه ریزی ریاضی.** در این قسمت قصد داریم روشی بر مبنای برنامه‌ریزی عدد صحیح برای حل جدول سودوکوی معمولی ارائه دهیم. به‌دین منظور ابتدا مربع ۹ × ۹ را با مکعب ۹ × ۹ × ۹ شامل آرایه‌هایی با مقادیر صفر و یک، جایگذاری می‌کنیم. تعریف می‌کنیم $J = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ و هم‌چنین

$$x_{ijk} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر خانه } (i,j) \text{ شامل رقم صحیح } k \text{ باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad (۱)$$

حال محدودیت‌های جدول سودوکو را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

**محدودیت اول:** برای مربع $(i,j)$ در جدول تنها یک مقدار از بین اعداد ۱ تا ۹ بایستی اختصاص داده شود. بنابراین از میان متغیرهای $x_{ij۱}, x_{ij۲}, \dots, x_{ij۹}$ تنها یکی از آن‌ها می‌تواند مقدار غیر صفر اختیار کند. به‌منظور تضمین نمودن این شرط، محدودیت زیر بایستی در نظر گرفته شود،

$$\sum_{k=۱}^{۹} x_{ijk} = ۱, \ \ \forall i,j \in J. \qquad (۲)$$

[1]Binary Integer Linear Programming

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

**محدودیت دوم:** در سطر i ــام جدول نیز هر عدد صحیح ۱ تا ۹ فقط یک بار ظاهر می‌شود، بنابراین بایستی داشته باشیم،

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1, \ \ \forall i, k \in J. \tag{3}$$

**محدودیت سوم:** به‌طور مشابه در ستون j ــام جدول نیز هر عدد صحیح ۱ تا ۹ فقط یک بار ظاهر می‌شود، بنابراین محدودیت زیر را خواهیم داشت،

$$\sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1, \ \ \forall j, k \in J. \tag{4}$$

**محدودیت چهارم:** در زیر ماتریس $3 \times 3$ پیشرو اول جدول نیز بایستی اعداد ۱ تا ۹ تنها یکبار ظاهر شوند. برای این‌منظور، برای عناصر $1 \leq i \leq 3$، $1 \leq j \leq 3$ و $1 \leq k \leq 9$ بایستی داشته باشیم،

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ijk} = 1. \tag{5}$$

برای ۹ جدول $3 \times 3$ که همان زیر ماتریس های $3 \times 3$ می‌باشند نیز بایستی اعداد ۱ تا ۹ تنها یکبار در هر یک از آنها ظاهر شوند، پس باید داشته باشیم،

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{(i+a)(j+b)k} = 1, \ \ a, b \in \{0, 3, 6\}. \tag{6}$$

**محدودیت پنجم:** هرسرنخ می‌تواند به‌عنوان یک قید بیان شود. فرض کنید سرنخ مکان $(i, j)$ $n$ در جدول عدد $m$ باشد، که $1 \leq m \leq 9$. پس خواهیم داشت،

$$x_{ijm} = 1, x_{ijk} = 0, \ \ k \in J \setminus \{m\}.$$


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

در نتیجه، با توجه به محدودیت‌های ذکر شده در بالا می‌توان مدل زیر را برای یافتن راه حلی از یک جدول سودوکو معمولی ارائه داد.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \circ^T x \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{k=۱}^{۹} x_{ijk} = ۱, \ \ \forall i, j \in J, \\
& \sum_{j=۱}^{۹} x_{ijk} = ۱, \ \ \forall i, k \in J, \\
& \sum_{i=۱}^{۹} x_{ijk} = ۱, \ \ \forall j, k \in J, \\
& \sum_{i=۱}^{۳} \sum_{j=۱}^{۳} x_{ijk} = ۱, \\
& \sum_{i=۱}^{۳} \sum_{j=۱}^{۳} x_{(i+a)(j+b)k} = ۱, \ \ a, b \in \{\circ, ۳, ۶\}, \\
& x_{ijm} = ۱, x_{ijk} = \circ, \ \ k \in J \setminus \{m\}, (i, j) \in C, \\
& x_{ijk} \in \{\circ, ۱\}, \ \ \forall i, j, k \in J.
\end{aligned} \tag{۷}$$

توجه شود که در مدل فوق $C$ همان مجموعه اعداد سرنخ است. در این مقاله از دستور $bintprog$ در نرم افزار متلب برای حل کردن مدل $BILP$ فوق استفاده می‌شود (توجه کنید که $bintprog$ در قسمت بهینه سازی نرم افزار متلب در دسترس است). نرم افزارهای دیگر نیز قابلیت حل این $BILP$ را دارا هستند. به طور مثال، این برنامه در [۱۴] توسط $Excel$، در [۴] به کمک $Xpress - mosel$ و در [۶] با استفاده از $SAS$ نوشته شده است.

در مدل فوق، هدف پیدا کردن حداقل یک جواب شدنی است که در محدودیت‌های این مدل صدق کند. بدین منظور از لحاظ تئوری لزومی برای در نظر گرفتن تابع هدف برای مساله وجود ندارد، اما برای به کار بردن این مدل و حل آن توسط نرم افزاری مانند متلب لازم است که تابع هدف داشته باشیم. به همین خاطر است که در اینجا بردار $\circ^T$ را به عنوان بردار ضرایب تابع هدف در نظر گرفته‌ایم.

**قضیه ۱.۲.** *اگر $x^*$ جواب بهینه برای مدل $BILP$ فوق با تابع هدف $min\ \circ^T x$ باشد، آنگاه $x^*$ جواب بهینه مدلی با محدودیت‌های مشابه مدل فوق و تابع هدف متفاوت به صورت $min\ \alpha e^T x$ خواهد بود، که در آن $e$ بردار واحد و $\alpha$ یک اسکالر است.*

**اثبات.** برای اثبات، ابتدا مدل ارائه شده فوق را مدل $A$ و مدل با محدودیت‌های مشابه این مدل و تابع هدف متفاوت را $B$ در نظر می‌گیریم. حال فرض کنیم $x^*$ جواب بهینه مدل $A$ باشد، در نتیجه شدنی هم هست. فرض خلف کنیم که $x^*$ جواب بهینه مدل $B$ نباشد. بنابراین یک جواب شدنی $y$ وجود دارد بطوریکه $\alpha e^T y < \alpha e^T x^*$، پس $e^T(y - x^*) < \circ$. چون $x^*$ و $y$ بردارهای دودویی ساخته شده از صفر و یک هستند، می‌توان نتیجه گرفت که تعداد عناصر غیر صفر بردار $x^*$ بیشتر از بردار $y$ است. از طرفی قیود مشابه دو مدل $A$ و $B$ نشان می‌دهند که جواب شدنی مدل باید شامل دقیقا $n^۲$ عنصر یک باشد. از آنجایی‌که y یک جواب شدنی با دقیقا $n^۲$ عنصر یک برای مدل

$B$ است، پس $x^*$ باید $n^۲ + ۱$ عنصر یک داشته باشد و این بدان معنی است که $x^*$ شدنی نیست. این مطلب تناقض با فرض مسئله است، پس فرض خلف باطل و $x^*$ یک جواب شدنی و بهینه برای مدل $B$ خواهد بود. $\square$

**۲.۲. تست مدل در متلب.** به کمک نرم افزار متلب برنامه‌ای به منظور حل مدل $BILP$ فوق ارائه شده است[۲]. این برنامه مستلزم ورود داده‌ها توسط کاربر، در ابتدای کار است. داده‌های وارد شده توسط کاربر در یک ماتریس به نام $G$ نشان داده می‌شود. برای مثال می‌خواهیم جدول سودوکوی داده شده در شکل زیر را به کمک این برنامه حل کنیم.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 2 | |
| | 2 | | | | | 5 | | |
| | | 7 | | | 3 | 4 | | |
| 2 | | | 1 | | | 3 | 4 | |
| 6 | 4 | | | 8 | | | 5 | 9 |
| | 9 | 5 | | | 2 | | | 1 |
| | | 3 | 4 | | | 8 | | |
| | | 9 | | | | | 1 | |
| | 1 | | | | | | | |

با ورود داده‌های این مثال توسط کاربر، ماتریس $G$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$
\mathbf{G}=\begin{pmatrix}
1 & 8 & 2\\
2 & 2 & 2\\
2 & 7 & 5\\
3 & 3 & 7\\
3 & 6 & 3\\
3 & 7 & 4\\
 & \vdots & \\
8 & 3 & 9\\
8 & 8 & 1\\
9 & 2 & 1
\end{pmatrix}
$$

هر خط در این ماتریس دارای سه عدد است که به ترتیب بیانگر اندیس سطر، اندیس ستون و مقدار عدد هستند. با اجرای کد مذکور توسط یک سیستم مکینتاش $G۵$ با پردازشگر $۲/۷GHz$ و حافظه $۸GB$ در ۱۶/۰۸ ثانیه یک جواب شدنی بدست آمد، که در شکل (۲) ارائه گردیده است. مسلما این رویکرد بطور کلی کندتر از آن است که یک شخص مراحل منطقی حل جدول سودوکو را انجام دهد. یک برنامه دیگر برای حل جدول سودوکو در [۱۲] می‌توان یافت که در آن بر اساس مقاله [۱۱]، از نرم افزار متمتیکا [۳]برای حل جدول سودوکو استفاده می‌شود.

[2] http://aristotle.davidson.edu/chartier/sudoku/sudoku.m. [3] Mathematica


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 1 | 2 | 7 |
| 8 | 2 | 6 | 7 | 1 | 4 | 5 | 9 | 3 |
| 1 | 5 | 7 | 9 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 |
| 2 | 7 | 8 | 1 | 5 | 9 | 3 | 4 | 6 |
| 6 | 4 | 1 | 3 | 8 | 7 | 2 | 5 | 9 |
| 3 | 9 | 5 | 6 | 4 | 2 | 7 | 8 | 1 |
| 5 | 6 | 3 | 4 | 9 | 1 | 8 | 7 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 8 | 7 | 6 | 9 | 3 | 5 |

شکل ۲: جواب شدنی برای مثال

**۳.۲. روش برنامه ریزی صحیح.** در متلب از دستور $bintprog$ برای حل یک جدول سودوکو داده شده استفاده می‌شود. این دستور از روش شاخه و کران برای مشخص کردن جواب بهینه بهره می‌جوید. روش شاخه و کران با حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی $(lp)$[۴] ساده شده، که از طریق جایگزین نمودن محدودیت‌های ضعیف‌تر $۰ \leq x_{ijk} \leq ۱$ به جای محدودیت‌های دودویی $x_{ijk} = ۰$ یا ۱ بدست می‌آید، یک جواب برای مدل $BILP$ فوق تعیین می‌کند. در هر شاخه، روش شاخه و کران برای متغیرهایی که پس از حل مدل ساده شده مذکور، مقدار صحیح نگرفته‌اند (یعنی به صورت $۰ < x_j < ۱$ هستند)، دو محدودیت $x_j = ۰$ برای یک شاخه و $x_j = ۱$ برای شاخه دیگر را به مسئله $lp$ ساده شده قبل اضافه می‌کند. از آنجایی‌که مقدار تابع هدف مدل $BILP$ به ازای هر جواب شدنی صفر است، کران در روش شاخه و کران در اینجا معنی پیدا نمی‌کند. بر اساس ساختار الگوریتم شاخه و کران، اگر عددی در جدول سودوکو داده شده باشد، به صورت قابل ملاحظه‌ای فضای جستجوی الگوریتم را کاهش می‌دهد. به طور مثال، جدول سودوکو داده شده در شکل (۱) را در نظر بگیرید. عنصر واقع در مکان $(۱,۳)$ در این ماتریس $۹ \times ۹$، عدد ۷ است. پس داریم $x_{۱۳۷} = ۱$، و در نتیجه روابط زیر برقرار خواهد بود:

- عدد دیگری نمی‌تواند در جایگاه $(۱,۳)$ قرار بگیرد، پس داریم $x_{۱۳k} = ۰, \quad \forall k \neq ۷$.
- در ستون سوم نبایستی جایگاه دیگری وجود داشته باشد که در آن عدد ۷ قرار گیرد، در نتیجه خواهیم داشت $x_{i۳۷} = ۰, \quad \forall i \neq ۱$.
- در سطر اول نیز نبایستی جایگاه دیگری وجود داشته باشد که در آن عدد ۷ قرار گیرد، پس داریم $x_{۱j۷} = ۰, \quad \forall j \neq ۳$.
- در زیر ماتریس $(۱,۱)$، (اولین زیر ماتریس $۳ \times ۳$ بالا سمت چپ) هیچ جایگاه دیگری نبایستی با عدد ۷ پر شود، در نتیجه خواهیم داشت $x_{۲۱۷} = x_{۲۲۷} = x_{۳۱۷} = x_{۳۲۷} = ۰$.

بنابراین برای هر عنصر داده شده حداکثر ۲۹ تا ( در حالت کلی $(۳(n-۱) + (m-۱)^۲ + ۱)$) از $n^۳ = ۷۲۹$ متغیرهای تصمیم تعیین می‌شوند. بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها، فضای جستجوی مدل $۲^{n^۳}$ است، زیرا هر متغیر تصمیم دو مقدار می‌پذیرد و $n^۳$ تا متغیر تصمیم وجود دارد. برای $n = ۹$ داریم $۲^{۷۲۹} \approx ۲/۸۲ \times ۱۰^{۲۱۹}$. از سوی دیگر، دسته محدودیت ششم در مدل فوق اطلاعاتی را در مورد برخی از متغیرهای تصمیم ارائه می‌دهد که هر

[4] Linear Programming

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339 

یک از این محدودیت‌ها قادر خواهد بود که فضای جستجو را بسیار کاهش دهد. فرض کنید تنها ۹ رقم در جدول سودوکو از قبل مشخص شده باشند، بطوریکه این ۹ رقم در زیرماتریس‌های ۳ × ۳، ستون‌ها و سطرهای مجزا قرار داشته باشند. در این حالت $۹ \times ۲۹ = ۲۶۱$ تا از ۷۲۹ متغیر تصمیم مشخص خواهند بود. بنابراین فضای جستجو الگوریتم به $۲^{۴۶۸} \approx ۷/۶۲ \times ۱۰^{۱۴۰}$ کاهش خواهد یافت. البته هر چه داده های از پیش مشخص شده بیشتری در جدول سودکو اولیه باشد، فضای جستجو نیز بیشتر کاهش می‌یابد و در نتیجه حل مدل بسیار ساده‌تر می‌شود.

## ۳. حل انواع دیگر جدول سودوکو

با توجه به محبوبیت جداول سودوکو، تغییراتی روی جدول سنتی و رایج آن پدید آمد که منجر به تولید انواع مختلفی از جداول سودوکو گردیده است. برای آشنایی با انواع جدول سودوکو می‌توان به [۸] و [۳] مراجعه نمود. در ادامه سعی داریم ضمن معرفی چند نوع از جدول‌های سودوکو، روشی‌هایی بر مبنای برنامه ریزی عدد صحیح دودویی برای حل آن‌ها ارائه دهیم. در واقع برای ارائه مدل برای انواع دیگر از جداول سودوکو، کافی است مدل برنامه ریزی عدد صحیحی ارائه شده برای حل جدول سودوکوی معمولی را با اضافه نمودن محدودیت‌های مناسب جدید بسط دهیم.

**۱.۳. جدول سودوکوی $X$.** [۵] در جدول سودوکوی $X$ نیز مانند جداول سودوکوی معمولی، تعدادی سر نخ داده می‌شود و در این جدول نیز تمامی محدودیت‌های سودکو معمولی جهت حل آن بایستی در نظر گرفته شوند. تنها تفاوت این نوع جدول با سودکو معمولی در این است که اعداد ۱ تا ۹ باید فقط یک بار روی دو قطر اصلی آن ظاهر گردند. شکل (۳) مثالی از یک جدول سودوکوی $X$ را نشان می‌دهد.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | | | | 2 |
| 4 | | | | | | | | 7 |
| | 7 | | | | | | 9 | |
| | | 5 | | | | 4 | | |
| | | | 1 | 4 | 5 | | | |
| | | 6 | | | | 9 | | |
| | 3 | | | | | | 8 | |
| 9 | | | | | | | | 4 |
| 1 | | | | | | | | 6 |

شکل ۳: مثالی از یک جدول سودوکوی $X$

با توجه به ویژگی جدول سودوکوی $X$، به منظور ارائه مدلی بر مبنای برنامه ریزی عدد صحیح برای حل آن، کافی است محدودیت‌های زیر را به محدودیت‌های مدل (۷) اضافه کنیم.

[5] Sudoku X


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

برای آنکه اعداد ۱ تا ۹ روی قطر اصلی جدول، تنها یک بار ظاهر شوند، قید زیر اضافه می‌گردد،

$$\sum_{r=۱}^{۹} x_{rrk} = ۱, \;\; k = ۱, \ldots, ۹. \tag{۸}$$

به طور مشابه برای قطر مخالف قید زیر اضافه می‌شود،

$$\sum_{r=۱}^{۹} x_{r(۱۰-r)k} = ۱, \;\; k = ۱, \ldots, ۹. \tag{۹}$$

دو قید فوق تضمین می‌کنند که اعداد ۱ تا ۹ فقط یک بار روی دو قطر اصلی جدول سودوکو ظاهر شوند.

**۲.۳. جدول سودوکوی چهار مربع.** [۶] جدول سودوکوی چهار مربع، جدولی است که علاوه بر اینکه در استانداردهای جدول سودوکوی معمولی صدق می‌کند، در آن چهار مربع ۳ × ۳ مشخص شده‌اند که اعداد ۱ تا ۹ دقیقا یک بار در این چهار مربع بایستی ظاهر گردند. شکل (۴) یک نمونه از جدول سودوکوی چهار مربع را نشان می‌دهد.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 7 | | | 4 | | | 1 |
| | | | 2 | 8 | | | | |
| 2 | | 6 | | | 9 | | | |
| | 5 | | | | | 2 | | 6 |
| | 1 | | | 2 | | | 9 | |
| 6 | | 4 | | | | | 7 | |
| | | | 8 | | | 9 | | 2 |
| | | | | 7 | 2 | | | |
| 8 | | | 4 | | | 6 | | |

شکل ۴: مثالی از یک جدول سودوکوی چهار مربع

با توجه به توضیحی که در مورد جدول سودوکوی چهار مربع ذکر شد، برای ارائه مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح به منظور حل این نوع جدول سودوکو، کافی است محدودیت زیر به مدل (۷) اضافه گردد.

$$\sum_{r=i}^{i+۲} \sum_{c=j}^{j+۲} x_{rck} = ۱, \;\; i = ۲, ۶, \;\; j = ۲, ۶, \;\; k = ۱, \ldots, ۹. \tag{۱۰}$$

[6] Four square sudoku

**۳.۳. جدول سودوکوی چهار هرم.** [7] در جدول سودوکوی چهار هرم مانند جدول سودوکوی چهار مربع، چهار ناحیه مشخص شده است که علاوه بر در نظر گرفتن استانداردهای جدول سودوکو معمولی، در این ناحیه‌ها اعداد ۱ تا ۹ حتما باید دقیقا یک بار ظاهر شوند. توجه می‌شود که این نواحی در این نوع جدول‌ها، به شکل هرم می‌باشند و بدین خاطر است که این گونه از جدول‌ها به جدول‌های سودکو چهار هرمی معروف شده‌اند. شکل (۵) مثالی از جدول سودوکوی چهار هرم را نشان می‌دهد. چهار دسته محدودیت زیر به منظور ارائه مدل برنامه ریزی خطی برای

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | 5 | | | | 7 |
| | 7 | 5 | 6 | | | | 3 | |
| | | 3 | | | | 5 | 2 | |
| | | | | | | | 1 | |
| 5 | | | | 7 | | | | 2 |
| | 1 | | | | | | | |
| | 5 | 4 | | | | 6 | | |
| | 6 | | | | 1 | 8 | 7 | |
| 8 | | | | 6 | | | | 4 |

شکل ۵: مثالی از یک جدول سودوکوی چهار هرم

حل جدول سودوکوی چهار هرم، به محدودیت‌های مدل (۷) اضافه می‌گردد.

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{3}\sum_{c=3+r}^{9-r} x_{rck} = 1,\ \ k = 1,\dots,9,\\
&\sum_{c=1}^{3}\sum_{r=1+c}^{7-c} x_{rck} = 1,\ \ k = 1,\dots,9,\\
&\sum_{r=7}^{9}\sum_{c=11-r}^{r-3} x_{rck} = 1,\ \ k = 1,\dots,9,\\
&\sum_{c=7}^{9}\sum_{r=13-c}^{c-1} x_{rck} = 1,\ \ k = 1,\dots,9.
\end{aligned} \tag{11}$$

این محدودیت‌ها تضمین می‌کند که اعداد ۱ تا ۹ در ناحیه‌های مشخص شده دقیق یک بار ظاهر می‌شود.

**۴.۳. جدول سودوکوی موقعیتی.** [8] سودوکوی موقعیتی، جدولی $9 \times 9$ است که اگر آن را به ۹ جدول $3 \times 3$ تقسیم کنیم، خانه‌های جداول $3 \times 3$ دارای ۹ رنگ مختلف هستند. مثالی از این نوع جدول را در شکل (۶) مشاهده می‌کنید. در این نوع جدول علاوه بر اینکه اعداد ۱ تا ۹ در هر سطر و ستون جداول $3 \times 3$ باید تنها یک بار به کار بروند، این نکته نیز مدنظر قرار می‌گیرد که در هر رنگ از جدول نیز اعداد ۱ تا ۹ تنها یک بار ظاهر می‌گردند.

[7] Four pyramids sudoku [8] Position sudoku


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 | 7 | | | | 8 | 1 |
| | 4 | | | | | 9 | | |
| | 8 | | | | 3 | | | |
| | 5 | | | 7 | | | | |
| | | 3 | 5 | | 6 | 7 | | |
| | | | | 3 | | | 5 | |
| | | | 8 | | | | 6 | |
| | | 2 | | | | | 9 | |
| 5 | 6 | | | | 9 | 3 | | |

شکل ۶: مثالی از یک جدول سودوکوی موقعیتی

بنابراین برای مدل متناظر با جدول سودوکوی موقعیتی، بایستی محدودیت‌هایی اضافه بر مدل مربوط به جدول سودوکوی معمولی داشته باشیم. از آنجایی‌که ۹ مکان مختلف و ۹ رقم ممکن وجود دارد، بنابراین باید $۸۱ = ۹^۲$ محدودیت جدید به محدودیت‌های مدل (۷) اضافه شود. این محدودیت‌ها بصورت زیر هستند،

$$\sum_{a=\circ}^{۲}\sum_{b=\circ}^{۲} x_{(۳a+i)(۳b+j)k} = ۱, \quad i = ۱,۲,۳, \quad j = ۱,۲,۳, \quad k = ۱,\dots,۹$$

در فرمول فوق $i$ و $j$ تعیین کننده موقعیت درون جدول سودوکو هستند. به عنوان مثال $i = j = ۱$ بیانگر خانه اول در گوشه سمت چپ بالای جدول است.

**۵.۳. جدول سودوکوی جادویی سه تایی.** [9] در این نوع جدول سودوکو، سه تا از ۹ جدول $۳ \times ۳$ با رنگ دیگری نمایش داده می‌شوند. برای حل آن باید در نظر داشت که اعداد ۱ تا ۹ به گونه‌ای در این سه جدول رنگی قرار بگیرند که علاوه بر ظاهر شدن تنها یکبار هر عدد، جمع سه عدد موجود در هر سطر و ستون با هم برابر باشد. مثالی از این نوع جدول سودوکو در شکل زیر نمایش داده شده است. در این مقاله، جدول سودوکوی جادویی سه تایی را بررسی می‌نماییم، این در حالی است که می‌توان جدول سودوکوی جادویی با بیش از سه قسمت رنگی نیز ایجاد کرد.

[9] Three majic sudoku

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | | | | | | | |
| 3 | 5 | | | | 7 | | | |
| | | 9 | | | 1 | | | |
| | | | | | | 6 | 4 | |
| | | | | | | | | |
| | 1 | 4 | | | | | | |
| | | | 3 | | | 5 | | |
| | | | 9 | | | | 1 | 6 |
| | | | | | | | 8 | |

شکل ۷: مثالی از یک جدول سودوکوی جادویی سه تایی

در ادامه قصد داریم یک مدل $BILP$ به منظور حل جدول سودوکوی جادویی سه تایی ارائه دهیم. از آنجایی‌که در هر مربع رنگی، جمع هر سطر و ستون باید یکسان باشد، به راحتی مشاهده می‌گردد که عدد جادویی که باید جمع هر سطر و ستون برابر آن باشد، عدد ۱۵ است. این بدان خاطر است که اگر اعداد واقع در هر سطر و ستون در یک مربع را با هم جمع کنیم، حاصل این اعداد برابر ۹۰ خواهد شد. زیرا هر عدد طبیعی ۱ تا ۹ دوبار در جمع محاسبه می‌شود ( یکبار برای سطر و یکبار در ستون خودش). حال چون ۳ سطر و ۳ ستون ( در هر یک از این سه مربع جادویی) داریم، با تقسیم ۹۰ به ۶ جمع هر سطر و ستون در هر یک از مربع‌های جادویی برابر ۱۵ بدست خواهد آمد.
قرار می‌دهیم $x_{rck}=۱$ اگر و تنها اگر $k$ رقمی باشد که در خانه متناظر سطر $r$ و ستون $c$ ظاهر شود. بنابراین $\sum_{k=۱}^{۹} x_{rck}$ نشان دهنده جمع ارقام موجود در $(r,c)$ است. از آنجایی‌که می‌دانیم باید جمع سطر و ستون در مربع‌های رنگی برابر ۱۵ باشد، روابط زیر را برای مربع رنگی بالا سمت راست می‌توان نوشت:

- جمع سطرهای مربع رنگی باید برابر ۱۵ باشد، پس بایستی داشته باشیم

$$\sum_{c=۷}^{۹}\sum_{k=۱}^{۹} kx_{rck}=۱۵,\quad r=۱,۲,۳.$$

- جمع ستون‌های مربع رنگی نیز باید برابر عدد ۱۵ باشد، یعنی باید محدودیت‌های اضافی زیر را نیز در نظر بگیریم

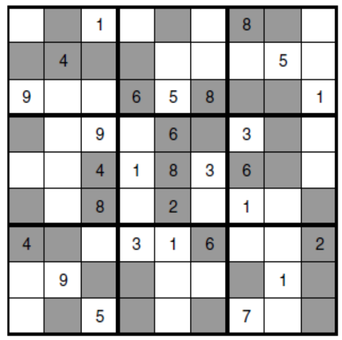
$$\sum_{r=۱}^{۳}\sum_{k=۱}^{۹} kx_{rck}=۱۵,\quad c=۷,۸,۹.$$

محدودیت‌های مربوط به دو مربع جادویی دیگر نیز به طور مشابه نوشته می‌شوند. برای مربع رنگی وسط $r=c=۴,۵,۶$ و مربع پایینی سمت چپ $r=۷,۸,۹$ و $c=۱,۲,۳$ خواهد بود. برای هر مربع جادویی ۶ محدودیت وجود دارد، از طرفی چون ۳ مربع جادویی داریم در کل ۱۸ محدودیت ایجاد می‌گردد. با اضافه کردن این ۱۸ محدودیت به مدل (۷)، یک مدل $BILP$ برای حل جدول سودوکوی جادویی سه تایی ایجاد می‌شود.

**۶.۳. جدول سودوکوی زوج و فرد.** سودوکوی زوج و فرد جدولی ۹ × ۹ با سرنخ‌های داده شده می‌باشد که شامل خانه‌های خاکستری و سفید رنگ می‌باشد. در این جدول تمام مربع‌های خاکستری بایستی تنها حاوی اعداد


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

زوج (یا فرد)، و مربع‌های سفید تنها حاوی اعداد فرد (یا زوج) می‌توانند باشند. هدف پر کردن تمام مربع‌های خالی است، به گونه‌ای که ارقام ۱ تا ۹ به طور دقیق در هر سطر، ستون و مربع $۳ \times ۳$ نمایش داده شود. شکل (۸) مثالی از یک جدول سودوکوی زوج و فرد است.



شکل ۸: مثالی از یک جدول سودوکوی زوج و فرد

علاوه بر محدودیت‌های جدول‌های سودوکو معمولی، برای حل جداول سودوکوی زوج و فرد نیازمند اضافه کردن محدودیت‌های دیگری نیز هستیم. برای این منظور، تمام خانه‌های خاکستری و سفید جدول داده شده را به ترتیب با $I_g$ و $I_w$ نشان می‌دهیم. حال قرار می‌دهیم،

$$J_e = \{۲, ۴, ۶, ۸\}, \quad J_o = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$$

بنابراین می‌توان محدودیت‌های جدید مربوط به این جدول سودوکو را به صورت زیر فرموله نمود،

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in J_o} x_{ijk} = ۰, \quad \sum_{k \in J_e} x_{ijk} = ۱, \quad \forall (i,j) \in I_g, \\ &\sum_{k \in J_e} x_{ijk} = ۰, \quad \sum_{k \in J_o} x_{ijk} = ۱, \quad \forall (i,j) \in I_w. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

حال با اضافه نمودن محدودیت‌های فوق به محدودیت‌های مدل (۷)، مدلی برای حل جداول سودوکوی زوج و فرد حاصل می‌گردد. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این نوع جدول سودوکو، می‌توان به [۱۳] مراجعه نمود.

## ۴. ساخت جداول سودوکو

**۱.۴. ساخت جدول به کمک روش جستجوی جامع.** اولین روش به منظور ساخت جدول سودوکو استفاده از روش جستجوی جامع است. روش جستجوی جامع، روشی است که به منظور شمارش نظام‌مند تمام کاندیدهای ممکن برای حل یک مسئله و چک کردن اینکه آیا هر یک از این کاندیدها در شرایط مسئله صادق‌اند یا خیر به کار می رود. بنابراین برا اساس این روش یک ایده ساده آنست که ابتدا یک جدول سودوکوی $۹ \times ۹$ را بطور تصادفی از اعداد ۱ تا ۹ پر کنیم. سپس با بررسی سطرها و ستون‌های جدول حاصل، چک می‌کنیم که آیا این جدول در خواص جدول سودوکو صدق می‌کند یا خیر. با این روش $۹^{۸۱} \approx ۱/۹۷ \times ۱۰^{۷۷}$ ماتریس مختلف ساخته می‌شود که همگی

مستلزم بررسی است. یعنی باید بررسی نمود که چند تا از این ماتریس‌ها دارای خواص سودوکو هستند. حال سوالی که مطرح می‌شود آنست که از میان این جدول‌ها چند جدول سودوکوی ۹ × ۹ وجود دارد؟

در ابتدا جدول‌های ۹ × ۹ شامل اعداد ۱ تا ۹ را در نظر می‌گیریم که در آنها هیچ سطر و ستونی با عددی تکراری وجود نداشته باشد. در حقیقت هر جدول سودوکو، حالت خاصی از این‌گونه از جدول‌های ۹ × ۹ است که تعداد آن‌ها برابر است با $۵۵۲۴۷۵۱۴۹۶۱۵۶۸۹۲۸۴۲۵۳۱۲۲۵۶۰۰ \approx ۵/۵۲۵ \times ۱۰^{۲۷}$. حال باید ببینیم چه تعداد از این جدول‌ها یک جدول سودوکو می‌باشند. تعداد جدول‌های سودکو معمولی ۹ × ۹ در [۱] محاسبه گردیده است و برابر $۶۶۷۰۹۰۳۷۵۲۰۲۱۰۷۲۹۳۶۹۶۰ \approx ۶/۶۷ \times ۱۰^{۲۱}$ است . این عدد معادل $۲۷۷۰۴۲۶۷۹۷۱ \times ۲^{۷} \times ۷۲^{۲} \times !۹$ . توجه کنید که تقریبا ٪۰/۰۰۰۱۲ از جدول‌های ۹ × ۹ که بصورت تصادفی پر شده بودند، قابل قبول به عنوان یک جدول سودوکو هستند. حال دو سوال بوجود می‌آید.

۱. مینیمم تعداد سرنخ‌هایی که باید از قبل در جدول سودکو داده شود تا اینکه جدول دارای جواب منحصر به‌فرد باشد، چقدر است؟ برای پاسخ به این سوال، در ابتدا راه حل‌های تجربی متفاوتی ارائه شد. به عنوان مثال، گوردن رویل [۹] جدول سودکو با جواب منحصر به‌فرد که دارای ۱۷ سرنخ بود را ساخت. او در مجموع ۳۵۳۹۶ جدول مجزا که هر یک دارای ۱۷ سرنخ بودند را یافت. در آن زمان حدسیاتی بر این اساس که هیچ جدول سودکویی که با تعداد ۱۶ یا کمتر از ۱۶ سرنخ وجود ندارد که دارای جواب منحصر به‌فرد باشد، وجود داشت. در نهایت مک‌گایر و همکارانش [۷] ثابت کردند که مینیمم تعداد سرنخ‌های داده شده در جدول می‌بایستی ۱۷ عدد باشد تا جدول سودکو دارای جواب منحصر به‌فرد باشد.

۲. با استفاده از داده‌ها در یک جدول با جواب منحصر به‌فرد، آیا راهی برای ساخت یک جدول دیگر، وابسته به جدول اولیه که دارای جواب منحصر به‌فرد باشد وجود دارد؟ روش‌هایی برای ساخت جدول جدید از روی یک جدول سودوکوی داده شده وجود دارد که در بخش بعد به کمک چندین قضیه و اثباتشان، به ارائه این روش‌ها می‌پردازیم.

**۲.۴. ساختن جدول جدید از جدول قدیمی.** در این بخش قصد داریم با داشتن یک جدول سودوکوی معمولی $S$، جداول سودوکوی دیگری از روی آن بسازیم. برای این منظور، ابتدا تعریفی از جدول سودوکوی معمولی در زیر ارائه نموده و سپس قضایایی بیان و اثبات می‌کنیم. در ادامه با کمک قضایای ارائه شده، ایده هایی برای ساخت جدول‌های سودوکو جدید از روی جدول سودکو اولیه ارائه می‌دهیم. ماتریس مربعی $S$ یک ماتریس سودوکو است اگر چهار شرط زیر را دارا باشد:

(۱) رتبه ماتریس n است بطوریکه $n = m^۲$ برای یک m مثبت.
(۲) در هر سطر $S$ اعداد ۱ تا n دقیقا یک بار استفاده شده است.
(۳) در هر ستون $S$ اعداد ۱ تا n دقیقا یک بار استفاده شده است.
(۴) در هر زیر ماتریس $S$ اعداد ۱ تا n دقیقا یک بار استفاده گردیده است.

**قضیه ۱.۴.** *اگر $S$ یک ماتریس سودوکو باشد، آن‌گاه $S$ ترانهاده نیز یک ماتریس سودوکو است.*

**اثبات.** می‌دانیم ترانهاده یک ماتریس، ازتعویض سطرها وستون‌های آن ماتریس حاصل می‌شود. بنابراین چون $S$ یک ماتریس سودوکوی $n$ است، در شرط اول تعریف ماتریس سودوکو صدق می‌کند و واضح است که این شرط برای ترانهاده آن هم برقرار است. شرط دوم (سوم) برای $S$ ترانهاده با خاصیتی که در شرط سوم (دوم) برای ماتریس $S$ صدق می‌کند، برقرار است. کافیست نشان دهیم که $S$ ترانهاده در خاصیت چهارم نیز صدق می‌کند. بدون کاستن از


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

کلیت مسئله فرض کنید $m=۲$، بنابراین هر بلوک $۲\times ۲$ است.

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} s_{۱۱} & s_{۱۲}\\ s_{۲۱} & s_{۲۲}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S^T}=\begin{pmatrix} s^T_{۱۱} & s^T_{۱۲}\\ s^T_{۲۱} & s^T_{۲۲}\end{pmatrix}$$

هر زیر ماتریس از ماتریس $S^T$، در ویژگی چهارم صدق می‌کند زیرا هر زیر ماتریس از $S^T$ توسط زیر ماتریسی از $S$ ساخته شده است که در شرط چهارم صدق می‌کرده است. □

قضیه قبل نشان می‌دهد که با ترانهاده گرفتن از جدول سودکو اولیه قادر به ساختن یک جدول سودوکوی جدید خواهیم بود. اما قضیه بعدی بسیار جالب‌تر است، چون به کمک آن قادر خواهیم بود جدول‌های بسیار زیادی را از روی جدول سودکو اولیه تولید نماییم.

**قضیه ۲.۴.** *اگر $S$ یک ماتریس سودوکو باشد، ماتریس سودوکوی جدید $\tilde{S}$ را می‌توان با جابجا کردن سطرها و ستون ها در هر یک از بلوک‌های ماتریس $S$ ساخت.*

**اثبات.** بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $m=۲$. پس جابجا کردن سطر و ستون در هر یک از بلوک‌ها را می‌توان با اعمال ماتریسی زیر نشان داد.

$$\tilde{S}=\begin{pmatrix} E_۱ & \\ & E_۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{۱۱} & s_{۱۲}\\ s_{۲۱} & s_{۲۲}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_۱ & \\ & F_۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_۱s_{۱۱}F_۱ & E_۱s_{۱۲}F_۲\\ E_۲s_{۲۱}F_۱ & E_۲s_{۲۲}F_۲\end{pmatrix}$$

که در آن $E_i$ و $F_i$ ماتریس‌های جایگشت هستند که منجر به ایجاد تغییر و جابجایی در سطر (یا ستون) ماتریس‌های $۲\times ۲$ ابتدایی می‌شوند. واضح است که $\tilde{S}$ در شرط اول جدول سودوکوی معمولی صدق می‌کند، زیرا بلوک دوباره مرتب شده، تغییری در اندازه ماتریس ایجاد نمی‌نماید. حال برای نشان دادن شرط دوم، $i$ــامین سطر از اولین بلوک سطری $\tilde{S}$ را در نظر بگیرید:

$$e_i^T(E_۱S_{۱۱}F_۱ \quad E_۱S_{۱۲}F_۲)=e_i^TE_۱(S_{۱۱}F_۱ \quad S_{۱۲}F_۲)$$

با کمی دقت در عبارت فوق، می‌بینیم که ماتریس $(S_{۱۱}F_۱ \quad S_{۱۲}F_۲)$ اولین بلوک سطری از S با ستون‌های تغییر کرده است و $e_i^TE_۱$ بیانگر یک ردیف خاص در این ماتریس می‌باشد. چون سطرهای ماتریس $S$ در شرط دوم صدق می‌کنند، در نتیجه شرط ۲ برای سطرهای خاص $\tilde{S}$ نیز برقرار است. با در نظر گرفتن ترانهاده ماتریس، به طریق مشابه می‌توان نشان داد که شرط سوم نیز برای ماتریس $\tilde{S}$ برقرار خواهد بود. حال کافی است نشان دهیم که $\tilde{S}$ در ویژگی ۴ نیز صدق می‌کند. با توجه به نحوه تعریف $\tilde{S}$ که در ابتدای اثبات آمده است، به راحتی دیده می‌شود که هر زیر ماتریس $\tilde{S}$ در ویژگی ۴ صدق می‌کند، زیرا هر زیرماتریس از جابجایی سطر و ستون ماتریس $S$ حاصل گردیده است.

□

**قضیه ۳.۴.** *اگر $S$ یک ماتریس سودوکو باشد آنگاه ماتریس سودوکوی جدید $\tilde{S}$ را می‌توان به روش مرتب سازی دوباره اعداد در $S$ ساخت. بعبارت دیگر، اگر یک نگاشت یک به یک میان اعداد $a=(۱,\ldots,n)$ که برای ساخت $S$ استفاده شده و جایگشت $b$ از این اعداد که برای ساخت $\tilde{S}$ استفاده شده است وجود داشته باشد، آنگاه $\tilde{S}$ یک ماتریس سودکو جدید خواهد بود.*

**اثبات.** به خلف فرض کنیم که $a \neq b$، اما $\tilde{S}$ یک ماتریس سودوکو جدید نباشد. بدون کاستن از کلیت برهان می‌توان فرض کرد که ویژگی دوم برای ماتریس $\tilde{S}$ برقرار نیست. بنابراین سطری از $\tilde{S}$ وجود دارد که یک عدد در آن تکرار شده است. از این رو نگاشت از مجموعه اعداد $a$ به $b$ یک به یک نیست که این تناقض است. بنابراین بایستی ماتریس $\tilde{S}$ یک ماتریس سودوکوی جدید باشد. $\square$

فرض کنید $n = ۴$. ماتریس سودوکوی $S$ را به صورت زیر در نظر بگیرید. تحت جایگشت $b = (۴۱۳۲)$ از $a = (۱۲۳۴)$ می‌توان ماتریس سودوکوی جدید $\tilde{S}$ را ساخت.

$$S = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \tilde{S} = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

## ۵. نتیجه گیری

این مقاله به حل و ساخت انواع مختلف و مشهور جدول سودوکو به کمک رهیافت‌های ریاضی پرداخته است. در ابتدای مقاله یک مدل بهینه‌سازی عدد صحیح دودویی ارائه گردید که توانایی حل هر جدول سودوکوی معمولی $n \times n$ را دارد. همچنین لینک دانلود فایل آماده شده در متلب که به کمک روش شاخه و کران، جدول سودوکو معمولی را حل می‌کند نیز در مقاله ذکر شده است. علاوه بر این، در بخش بعدی به گسترش مدل $BILP$ مذکور برای حل انواع دیگر جداول سودوکو پرداخته شده است. هم‌چنین در این مقاله قضایایی به منظور تولید جدول سودوکوی جدید ارائه گردیده شده است. این مقاله نشان می‌دهد که با شروع از یک جدول سودوکو، می‌توان به راحتی یک تقویم روزانه از جداول سودوکو را تولید نمود، به اندازه‌ای که برای کل قرن بعدی نیز کافی باشد. همچنین با اضافه کردن و یا حذف نمودن اعداد داده شده در هر جدول، قادر خواهیم بود که سطح دشواری هر بازی را تغییر دهیم.

## مراجع


[1] S. E. Bammel and J. Rothstein, The number of ۹ × ۹ Latin squares, *Discrete Math.*, 11 (1975) 93–95.

[2] A. C. Bartlett, T. P. Chartier, A. N. Langville and T. D. Rankin, An integer programming model for the Sudoku problem, *J. of Online Mathematics and its Applications*, 8 (2008) pp. 15.

[3] B. Berman, *Sudoku-type gaming activity*, KING SHOW GAMES Inc, U. S. Patent Application, 2008.

[4] M. J. Chlond, Classroom exercises in IP modeling: Su doku and the log pile, *INFORMS Transactions on Education*, 5 (2005) 77–79.

[5] J. P. Delahaye, The science behind Sudoku, *Scientific American*, 294 (2006) 80–87.

[6] R. DeVenezia, J. Garlach, L. Hoyle, T. Katz and R. Langston, SASr and Sudoku, SAS Global Forum, (2007), http://www2.sas.com/proceedings/forum2007/011-2007.pdf.


 DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119249.1339

[7] G. McGuire, B. Tugemann and G. Civario, There is no 16-clue Sudoku: Solving the Sudoku minimum number of clues problem via hitting set enumeration, *Experimental Mathematics*, 23 (2014) 190–217.

[8] J. W. Morrow, , R. F. Marsden, M. A. Hein and R. A. Luciano, Bally Gaming Inc, (2007). Sudoku-type wagering game and method. U.S. Patent Application 11/626,224.

[9] Royle, G. Minimum Sudoku. http://www.csse.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php.

[10] E. Russell and F. Jarvis, There are 5472730538 essentially different Sudoku grids ··· and the Sudoku symmetry group, http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html.

[11] F. H. Simons, Solving a sudoku puzzle with mathematica, *Mathematica in Education and Research*, *10* (2005) 1–24.

[12] B. Torrence, Sudoku Game" from The Wolfram Demonstrations Project, (2011), http://demonstrations.wolfram.com/, SudokuGame.

[13] H. Yu, Y. Tang and C. Zong, Solving odd even sudoku puzzles by binary integer linear programming, In Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (ICNC-FSKD), 2016 12th International Conference on (2016) (2226–2230). IEEE.

[14] H. J. Weiss and R. A. Rasmussen, Lessons from modeling sudoku in excel, *INFORMS Transactions on Education*, 7) (2007) 178–184.

[15] Wikipedia, Sudoku solving algorithms-Wikipedia, The Free Encyclopedia [Online], Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Sudokusolvingalgorithms.

**مصطفی داوطلب علیائی**
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
m.davtalab-olyaie@kashanu.ac.ir

مصطفی داوطلب علیائی متولد ۱۳۶۲ در شهر قم است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشگاه خوارزمی تهران شد. وی در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع دکتری ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات در همان دانشگاه شد و از سال ۱۳۹۴ تا کنون عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه کاشان است.

**فاطمه قندی**
دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
f.ghandi۹۲@gmail.com

فاطمه قندی متولد شهریور ماه ۱۳۷۳ در شهر کاشان است. وی در سال ۱۳۹۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه خوانسار شد و در سال ۱۳۹۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران شد و از پایان نامه خود در زمینه تحلیل پوششی داده‌ها تحت نظر دکتر مصطفی داوطلب علیائی دفاع کرد.