



Computational Intelligence in Electrical Engineering
Vol. 11, No. 2, 2020
Research Paper

Order Reduction of Unstable Systems by Minimizing the Multi Objective Weighted Sum Function ITSE and H_{∞} Norm with Bat Algorithm

Hasan Nasiri Soloklo¹, Hassan Zarabadipour²

¹ Department of Electrical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
hasannasirisoloklo@edu.ikiu.ac.ir

² Department of Electrical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
zarabadi@edu.ikiu.ac.ir

Abstract:

In this work, a method for order reduction of unstable systems by minimizing the multi-objective weighted sum function ITSE and H_{∞} norm with bat algorithm is investigated. At first, the unstable model is divided into two parts: stable and unstable. Then, the order of reduced model is determined by considering the stable part and using Hankel norm. In the following, a fixed structure with unknown coefficients is considered for a reduced order model. By minimizing the weighted sum multi-objective included ITSE and H_{∞} norm with bat algorithm, in which the error is the difference between the step response of original system and reduced order model, unknown parameters of the reduced order model are determined. The Routh-Hurwitz criterion has been used to satisfy the stability condition, which is introduced as a constraint in the optimization problem, and thus the unconstrained optimization problem is converted to constrained optimization problem. Finally, the unstable part is joined to the reduced order part. To confirm and demonstrate the capability and efficiency of the proposed method, three large systems have been reduced and compared with some order reduction methods such as balanced truncation and optimal Hankel approximation. The results show the capability of the proposed method over classical methods.

Keywords: Large Scale Systems, Order Reduction, Bat Algorithm.



2252-083X/ © 2020 The Authors. Published by University of Isfahan

This is an open access article under the CC BY-NC-ND/4.0/ License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



<http://dx.doi.org/10.22108/isee.2019.108986.1100>

کاهش مرتبه سیستم‌های ناپایدار با استفاده از کمینه‌سازی تابع چندهدفه مجموع وزنی

ITSE و نرم H_∞ با الگوریتم خفاشحسن نصیری سلوکلو^۱، حسن زرآبادی پور^۲

۱- گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه بین‌المللی امام خمینی قزوین - قزوین - ایران

hasannasirisoloklo@edu.ikiu.ac.ir

۲- گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه بین‌المللی امام خمینی قزوین - قزوین - ایران

zarabadi@edu.ikiu.ac.ir

چکیده: این کار، روشی برای کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع ناپایدار با استفاده از کمینه‌سازی تابع چندهدفه مجموع وزنی معیارهای ITSE و H_∞ با کمک الگوریتم خفاش ارائه شده است. ابتدا مدل ناپایدار به دو بخش پایدار و ناپایدار تفکیک شده، سپس با در نظر گرفتن بخش پایدار و با استفاده از نرم هانکل، مرتبه مناسب سیستم مرتبه کاهشی تعیین شده است. در ادامه، ساختار ثابتی با ضرایب مجهول برای مدل مرتبه کاهشی در نظر گرفته می‌شود. با کمینه‌سازی تابع چندهدفه مجموع وزنی معیارهای ITSE و H_∞ با کمک الگوریتم خفاش که خطا اختلاف پاسخ پله سیستم اصلی و مدل مرتبه کاهشی است، ضرایب مجهول مدل مرتبه کاهشی تعیین شده‌اند. از محک روث - هرویتز برای ارضای شرط پایداری استفاده شده است که به صورت قید در مسئله بهینه‌سازی وارد شده و در نتیجه، مسئله بهینه‌سازی به مسئله بهینه‌سازی مقید تبدیل شده است. در آخر، بخش ناپایدار به بخش کاهش مرتبه یافته الحاق شده است. برای تأیید و نمایش توانمندی و کارایی روش پیشنهادی، سه سیستم ابعاد وسیع کاهش داده شده و با برخی روش‌های کاهش مرتبه از قبیل برش متعادل و تقریب بهینه هانکل مقایسه شده‌اند. نتایج به دست آمده نشان‌دهنده توانایی و قابلیت روش پیشنهادی نسبت به روش‌های کلاسیک است.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های ابعاد وسیع، کاهش مرتبه، الگوریتم خفاش

۱- مقدمه

ارزان و ساده می‌کند.

دیویسون، کاهش مرتبه سیستم را نخستین بار در سال ۱۹۶۶ پیشنهاد کرد [۱]. چن و همکاران در سال ۱۹۶۸، با استفاده از بسط نردبانی تابع تبدیل سیستم ابعاد وسیع رهیافتی مبتنی بر بسط‌های حوزه فرکانسی برای کاهش مرتبه ارائه کردند [۲]. ویلسون در سال ۱۹۷۰، با کمینه‌سازی انتگرال مربع خطا که در آن، خطا اختلاف میان پاسخ ضربه مدل ابعاد وسیع و مدل کاهش مرتبه یافته آن بود، نخستین روش مبتنی بر بهینه‌سازی را در کاهش مرتبه سیستم‌های MIMO و SISO ارائه کرد [۳، ۴]. شاماش در سال ۱۹۷۴، با استفاده از تقریب پید^۱ برای کاهش مرتبه سیستم‌های پایدار استفاده کرد [۵].

تقریب سیستم‌های مرتبه بالا با مدل‌های مرتبه پایین یکی از مسائل مهم در تئوری سیستم است. استفاده از مدل‌های مرتبه کاهشی تحلیل، شبیه‌سازی و طراحی سیستم کنترلی را آسان‌تر می‌کند. همچنین بعد پایین سیستم و کنترل‌کننده، پیاده‌سازی کنترل‌کننده، تعمیر و نگهداری آن را

^۱ تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۱۱/۱۵

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۸

نام نویسنده مسئول: حسن زرآبادی پور

نشانی نویسنده مسئول: ایران، قزوین، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی قزوین، گروه برق

توجه شده است. در این روش‌ها با تعمیم روش‌های کاهش مرتبه سیستم‌های خطی از قبیل برش متعادل [۲۱-۲۳]، بهینه‌سازی نرم H_2 [۲۴-۲۵]، استفاده از بسط سری ولترا^{۱۱} [۲۶] و روش‌های مبتنی بر زیرفضای کریلوف [۲۷-۲۸]، کاهش مرتبه مدل بررسی شده است.

در این مقاله، با استفاده از کمینه‌سازی تابع معیار چندهدفه مجموع ITSE و نرم H_∞ سیستم، کاهش مرتبه سیستم‌های ناپایدار بررسی شده است. به‌طور کلی در کاهش مرتبه سیستم‌های ناپایدار دو رهیافت وجود دارد؛ رهیافت تجزیه و رهیافت انتقال [۱۳]. در روش انتقال، مودهای سیستم ناپایدار به‌گونه‌ای انتقال داده می‌شوند که سیستم پایدار شود. سپس کاهش مرتبه سیستم پایدار بررسی می‌شود و در آخر، با عکس انتقال لحاظ شده، مدل ناپایدار کاهش مرتبه یافته به دست می‌آید؛ درحالی‌که در روش تجزیه، مودهای پایدار و ناپایدار از یکدیگر تفکیک می‌شوند و سپس بخش پایدار کاهش مرتبه می‌یابد. با توجه به اینکه در روش انتقال مکان مودهای ناپایدار تغییر می‌کند، این روش نسبت به روش تجزیه محبوبیت کمتری دارد. در صورتی که در روش تجزیه، مودهای ناپایدار تغییر نمی‌کنند. در این مقاله، پس از تفکیک مودهای پایدار و ناپایدار با روش تجزیه، از مفهوم مقادیر تکین هانکل^{۱۱} برای تعیین تعداد مودهای کم اهمیت تر بخش پایدار استفاده شده است. در ادامه، ساختار ثابت مناسبی برای مدل مرتبه کاهشی در نظر گرفته می‌شود که پارامترهای صورت و مخرج این مدل مرتبه کاهشی مجهول‌اند. با کمینه‌سازی تابع مجموع وزنی انتگرال حاصل ضرب زمان در مجذور خطا و اختلاف نرم H_∞ ، پارامترهای مجهول سیستم مرتبه کاهشی تعیین می‌شوند که در آن، خطا اختلاف پاسخ پله بخش پایدار سیستم اصلی و سیستم مرتبه کاهشی است. این کمینه‌سازی با کمک الگوریتم خفاش^{۱۲} انجام می‌شود. برای ارضای شرط پایداری از محک روث^{۱۳} استفاده شده است که این شرط به‌صورت قید در مسئله بهینه‌سازی بیان می‌شود و در نتیجه، مسئله بهینه‌سازی به مسئله بهینه‌سازی مقید تبدیل می‌شود. در آخر، بخش ناپایدار تفکیک شده به بخش مرتبه کاهشی افزوده می‌شود. برای نشان‌دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی، دو سیستم ناپایدار با استفاده از روش پیشنهادی

ال - عطار و ویدیاساگار در اواخر دهه ۷۰، با کمینه‌کردن نرم L_1 و L_∞ روشی برای کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع ارائه کردند [۶]. آبیناتا و همکاران [۷] در اوایل دهه ۱۹۸۰، با کمینه‌کردن معادله خطا به فرم بسته‌ای از جواب دست یافت. تا پیش از سال ۱۹۸۱ روش‌های کاهش مرتبه عموماً بر پایه مفهوم مقادیر ویژه استوار بودند. در سال ۱۹۸۱ مور با ارائه روشی مبتنی بر مدل متعادل‌شده، انقلابی در کاهش مرتبه ایجاد کرد [۸]. در این روش که به برش متعادل^۲ معروف است، از مفهوم مدل متعادل و مفاهیم گرامیان کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری برای تعیین مودهای کم اهمیت تر استفاده شده است. پس از مور، گلوور با ارائه مفهومی مشابه به نام تقریب بهینه هانکل^۳ به کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع پرداخت [۹]. اندرسون و لیو در اواخر دهه ۸۰ روشی بسیار دقیق به نام انحراف تکین^۴ ارائه کردند که در فرکانس‌های پایین، عملکرد بسیار مطلوبی داشت [۱۰].

فلدمن و فروند در سال ۱۹۹۵ روشی بر پایه تقریب پید و مبتنی بر روش لانسوز^۵ ارائه کردند که بسیاری از مشکلات محاسبه ممان‌ها^۶ را حل کرد [۱۱]. یکی دیگر از روش‌هایی که در کاهش مرتبه بسیار به آن توجه شد، استفاده از الگوریتم‌های تصویرسازی زیرفضای کریلوف^۷ است [۱۲]. در سال ۱۹۹۶ جمشیدی در [۱۳] روش‌های کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع را بررسی و دسته‌بندی کرد. در اوایل قرن اخیر، بهبودهای بسیاری برای روش برش متعادل ارائه شدند [۱۴-۱۵].

در دهه اخیر، استفاده از الگوریتم‌های تکاملی در کاهش مرتبه بسیار درخور توجه قرار گرفته است. چن و همکاران از الگوریتم تفاضلی^۸ برای کاهش مرتبه سیستم استفاده کردند [۱۶]. پارمار و همکاران در سال ۲۰۰۷ از الگوریتم انبوه ذرات^۹ برای کاهش مرتبه سیستم‌ها استفاده کردند [۱۷]. استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد و الگوریتم‌های تکاملی از دیگر روش‌های کاهش مرتبه مدل است. در این روش‌ها سیستم مرتبه کامل با توابع متعامد بسط داده شد و با کمینه‌سازی تابع هدف با الگوریتم‌های هوشمند مدل مرتبه کاهشی تعیین شد [۱۸-۲۰]. در سال‌های اخیر به کاهش مرتبه سیستم‌های غیرخطی و سیستم‌های دوخطی بسیار

صوت (L_0) برای شکار طعمه پرواز می‌کند. خفاش فرکانس پالس منتشرشده خود را در محدوده (f_{\min}, f_{\max}) تنظیم می‌کند و نرخ انتشار پالس (r) را در محدوده $[0,1]$ براساس نزدیکی به هدف تغییر می‌دهد.

گام ۳. فرکانس، بلندی صوت و نرخ انتشار پالس هر خفاش تغییر می‌کند.

گام ۴. بلندی صوت خفاش‌ها از مقدار بزرگ L_0 به حداقل مقدار ثابت L_{\min} تغییر می‌کند.

در طول فرایند بهینه‌سازی، موقعیت x_i و سرعت v_i به صورت (۱) تا (۳) به روز می‌شوند:

$$f_i = f_{\min} + (f_{\max} - f_{\min})\alpha, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (1)$$

$$v_i^t = v_i^{t-1} + (x_i^t - x^*)f_i \quad (2)$$

$$x_i^t = x_i^{t-1} + v_i^t \quad (3)$$

موقعیت x_i^t و سرعت‌های v_i^t به ترتیب موقعیت و سرعت هر خفاش نام در تکرار t و α بردار تصادفی به دست آمده از تابع توزیع یکنواخت است. همچنین، x^* بهترین مکان فعلی است که در هر تکرار پس از مقایسه با موقعیت خفاش‌ها انتخاب می‌شود. در هر تکرار در جستجوی محلی، بهترین جواب، انتخاب و موقعیت جدید هر خفاش به طور محلی با گام تصادفی به صورت (۴) به روز می‌شود:

$$x_{new} = x_{old} + \varepsilon L^t \quad \varepsilon \in [-1, 1] \quad (4)$$

ε عددی تصادفی و L^t متوسط بلندی صوت تمام خفاش‌ها در هر تکرار است. همچنین، بلندی صوت L_i و نرخ پالس ارسالی r در هر تکرار به صورت (۵) تا (۶) به روز می‌شود:

$$L_i^t = \beta L_i^0, \quad 0 < \beta < 1 \quad (5)$$

$$r_i^{t+1} = r_i^0 (1 - e^{-\gamma t}), \quad \gamma > 0 \quad (6)$$

بلندی صوت صفر نشان می‌دهد خفاش طعمه را یافته و به طور موقت ارسال پالس را متوقف کرده است. هنگامی که تعداد تکرار به بی‌نهایت میل کند، بلندی صوت به صفر

کاهش مرتبه داده شده و با برخی روش‌های کاهش مرتبه مقایسه شده‌اند. از نوآوری‌های این مقاله، استفاده از ترکیب دو معیار مبتنی بر حوزه فرکانس و حوزه زمان، یعنی معیارهای $ITSE$ و H_{∞} ، به عنوان معیار بهینه‌سازی چندهدفه است. این معیار پیشنهادی قابلیت اثرگذاری در هر دو حوزه زمان و فرکانس را دارد. همچنین، استفاده از الگوریتم خفاش در کاهش مرتبه مدل به عنوان الگوریتم فرا ابتکاری از دیگر نوآوری‌های روش پیشنهادی است که یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های آن، سرعت بالای همگرایی آن نسبت به دیگر الگوریتم‌ها است. در بخش دوم الگوریتم خفاش، معرفی و در بخش سوم، روش پیشنهادی ارائه شده است. در بخش چهارم شبیه‌سازی و نتایج ارائه می‌شوند و در نهایت، در بخش پنجم جمع‌بندی صورت می‌گیرد.

۲- الگوریتم خفاش

الگوریتم خفاش براساس رفتار شنوایی خفاش‌ها در مکان‌یابی طعمه‌هایشان توسعه داده شده است. نخستین بار یانگ، الگوریتم بهینه‌سازی خفاش را معرفی کرد [۲۹]. خفاش‌ها یک سری پالس‌های مافوق صوت را منتشر می‌کنند و به بازتاب این پالس‌ها از اشیای اطراف گوش می‌دهند. پهنای باند موج‌های مافوق صوت منتشرشده با توجه به نوع اشیاء و گونه‌ها تغییر می‌کند و با استفاده از هارمونیک‌ها افزایش می‌یابد. این موج‌ها با تأخیر زمانی و سطوح مختلفی از صوت بازتاب داده می‌شوند و باعث می‌شوند خفاش طعمه مدنظرش را مکان‌یابی و شکار کند. در سال‌های اخیر، بهینه‌سازی با الگوریتم خفاش در علوم مهندسی بسیار شایان توجه قرار گرفته است. تنظیم بهینه پایدار ساز سیستم قدرت غیرمتمرکز برای سیستم چند ماشین [۳۰]، برنامه‌ریزی شبکه انتقال [۳۱]، طراحی بهینه پارامترهای کنترل پیش‌بین مدل برای کنترل فرکانس بار [۳۲] از جمله کاربردهای اخیر الگوریتم خفاش‌اند. خلاصه‌ای از مراحل بهینه‌سازی الگوریتم خفاش در ادامه ارائه شده است [۳۳].

گام ۱. تمام خفاش‌ها برای سنجش فاصله و دسته‌بندی میان طعمه و مانع از شنوایی استفاده می‌کنند.

گام ۲. هر خفاش با سرعت (v_i) در موقعیت (x_i) ، با فرکانس ثابت (f_{\min})، طول موج متغیر (λ) و بلندی

اکنون بخش پایدار $G_{stable}(s)$ که از درجه n است را به صورت (۸) در نظر بگیرید:

$$G_{stable}(s) = \frac{a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}{s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n} \quad (8)$$

a_i و b_i ثابت‌های معلوم‌اند.

فرض کنید مدل مرتبه کاهش یافته پایدار به صورت (۹) باشد:

$$G_{r-stable}(s) = \frac{c_1 s^{r-1} + c_2 s^{r-2} + \dots + c_r}{s^r + d_1 s^{r-1} + d_2 s^{r-2} + \dots + d_r} \quad (9)$$

c_i و d_i ثابت‌های مجهول و r مرتبه مدل کاهش یافته‌اند که $r < n$ است. برای تعیین r از مفهوم مقادیر تکین هانکل استفاده شده است.

اگر گرامیان کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری به ترتیب با P و Q نمایش داده شوند، با جذر مقادیر ویژه حاصل ضرب P و Q ، یعنی $\sigma_H = \sqrt{\lambda_i(PQ)}$ مقادیر تکین هانکل محاسبه می‌شوند. با استفاده از این تعریف می‌توان آن دسته از متغیرهای حالت که اثر ضعیفی بر کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری دارند را مشخص کرد و متعاقباً مرتبه سیستم کاهش یافته را به دست آورد.

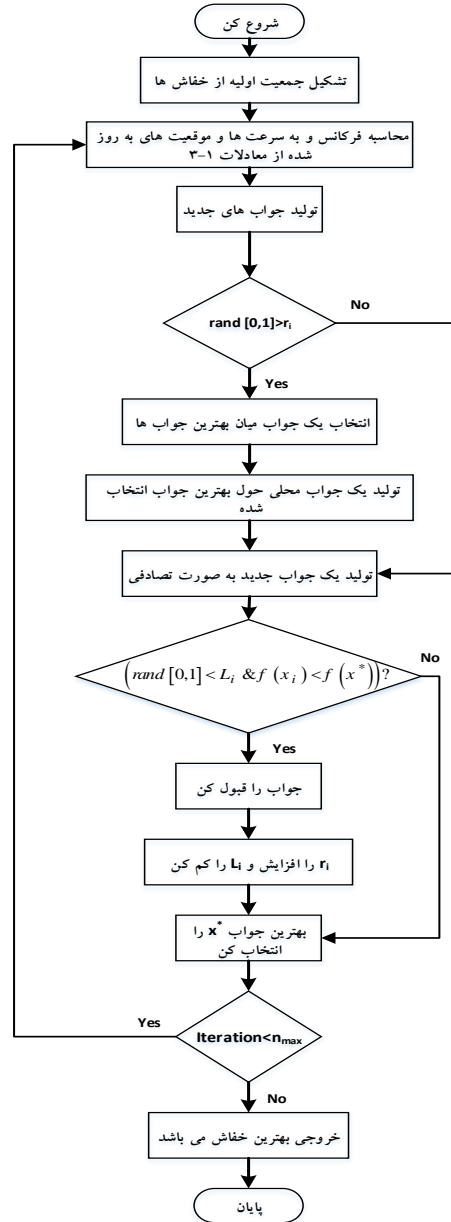
هدف، تعیین پارامترهای مجهول سیستم مرتبه کاهش یافته پایدار است؛ به گونه‌ای که سیستم $G_{r-stable}(s)$ مشخصه‌های سیستم $G_{stable}(s)$ را داشته باشد.

برای دستیابی به مدل مرتبه کاهش یافته با روش پیشنهادی، ابتدا بردار پاسخ پله سیستم $G_{stable}(s)$ ، y_{stable} تعیین شده است. سپس همانند رابطه (۹) ساختاری ثابت با ضرایب صورت و مخرج مجهول، بخش پایدار مدل مرتبه کاهش یافته در نظر گرفته شده است. این پارامترهای مجهول با استفاده از الگوریتم خفاش تعیین خواهند شد. هدف بهینه‌سازی، یافتن بهترین پارامترها برای $G_{r-stable}$ است. اگر $y_{r-stable}$ و y_{stable} به ترتیب پاسخ پله سیستم $G_{r-stable}(s)$ و $G_{stable}(s)$ باشند، انتگرال حاصل ضرب زمان در مجذور خطا به صورت (۱۰) تعریف می‌شود:

$$ITSE = \int_0^{t_f} t e^2(t) dt \quad (10)$$

همچنین، نرم H_∞ به صورت (۱۱) تعریف می‌شود:

می‌رسد و $\gamma_i^f = \gamma_i^0$ است. فلوجارت الگوریتم خفاش در شکل (۱) نشان داده شده است [۳۴].



شکل (۱): فلوجارت الگوریتم خفاش

۳- روش پیشنهادی

فرض کنید $G(s)$ یک سیستم ابعاد وسیع ناپایدار باشد. ابتدا این سیستم ناپایدار به دو بخش پایدار $G_{stable}(s)$ و ناپایدار $G_{unstable}(s)$ تفکیک شده است:

$$G(s) = G_{stable}(s) + G_{unstable}(s) \quad (7)$$

$$\begin{cases} d_1 = h_1 \\ d_2 = (h_2 + h_3 + \dots + h_r) \\ d_3 = h_1 (h_3 + h_4 + \dots + h_r) \\ \vdots \\ d_r = (h_{1+k} h_{3+k} \dots h_{r-2} h_r) \end{cases} \quad (15)$$

با قراردادن روابط بالا در مخرج مدل مرتبه کاهش، رابطه (۱۵) به دست می‌آید؛ بنابراین، شرط لازم و کافی برای اینکه تمام قطب‌های مدل مرتبه کاهش اکیداً در نیم‌صفحه چپ باشند، عبارت است از:

$$\begin{cases} h_1 > 0 \\ h_2 > 0 \\ \vdots \\ h_r > 0 \end{cases} \quad (16)$$

و در نتیجه:

$$\begin{cases} d_1 > 0 \\ d_2 > 0 \\ \vdots \\ d_r > 0 \end{cases} \quad (17)$$

بنابراین، برای اینکه مدل مرتبه کاهش پایدار باشد، پارامترهای مدل مرتبه کاهش، با کمینه‌کردن (۱۲) و رعایت شرط (۱۷) تعیین می‌شوند که مسئله بهینه‌سازی به مسئله بهینه‌سازی مقید تبدیل می‌شود. به عبارت دیگر، مدل مرتبه کاهش با کمینه‌کردن تابع برازش زیر به دست می‌آید:

$$J = w_1 \int_0^{t_f} te^2(t) dt + w_2 \|E\|_{\infty} \quad (18)$$

subject to $d_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots$

با کمینه‌کردن تابع برازش مقید (۱۸) با استفاده از الگوریتم خفاش، پارامترهای $G_{r-stable}(s)$ به گونه‌ای تعیین می‌شوند که مشخصه‌های آن با مشخصه‌های $G_{stable}(s)$ نزدیک به هم باشند.

پس از تعیین پارامترهای $G_{r-stable}(s)$ ، بخش ناپایدار $G_{unstable}(s)$ را به صورت (۱۹) به بخش پایدار کاهش مرتبه یافته اضافه می‌کنیم تا مدل مرتبه کاهش نهایی به دست آید:

$$G_r(s) = G_{r-stable}(s) + G_{unstable}(s) \quad (19)$$

$$\|E\|_{\infty} = \max |E(j\omega)| \quad (11)$$

$$E(s) = \text{که } e(t) = y_{stable}(t) - y_{r-stable}(t) \text{ و } u(s) = (G_{stable}(s) - G_{r-stable}(s))u(s) \text{ می‌باشند.}$$

با کمینه‌کردن تابع برازش مجموع وزنی معیار ITSE و نرم H_{∞} پارامترهای مدل مرتبه کاهش تعیین خواهند شد:

$$J^* = w_1 \int_0^{t_f} te^2(t) dt + w_2 \|E\|_{\infty} \quad (12)$$

w_1 و w_2 ضرایب وزنی تابع برازش اند که به صورت تجربی تعیین می‌شوند. با توجه به تأثیر بیشتر معیار ITSE نسبت به نرم H_{∞} ، $w_1 = 0.7$ و $w_2 = 0.3$ انتخاب شده‌اند.

رابطه (۱۲) معیاری ترکیبی است که در هر دو حوزه زمان و فرکانس اثرگذار است. با کمینه‌سازی معیار (۱۲) خطا در هر دو حوزه زمان و فرکانس شایان توجه قرار خواهد گرفت.

به دلیل اینکه بخش پایدار سیستم ابعاد وسیع ناپایدار باید کاهش داده شود، مدل مرتبه کاهش نیز باید پایدار باشد؛ بنابراین، روش پیشنهادی باید پایداری مدل مرتبه کاهش را نیز تضمین کند. به همین منظور، از محک روث برای تعیین شرط پایداری به صورت زیر استفاده شده است [۱۹]:

مخرج مدل مرتبه کاهش (۹) را به صورت زیر می‌توان نشان داد [۳۵]:

$$\begin{aligned} & s^r + h_1 s^{r-1} + (h_2 + h_3 + \dots + h_r) s^{r-2} \\ & + h_1 (h_3 + h_4 + \dots + h_r) s^{r-3} \\ & + \dots + h_{1+k} h_{3+k} \dots h_{r-2} h_r \end{aligned} \quad (13)$$

ضرایب دو سطر اول آرایه روث به همراه عناصر ستون اول را به صورت می‌توان زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} & 1, h_1, h_2, h_1 h_3, h_2 h_4, \\ & h_1 h_3 h_5, \dots, h_{1+k} h_{3+k} \dots h_{r-2} h_r \end{aligned} \quad (14)$$

k برای زوج، ۱ و برای فرد صفر است. با مقایسه درایه‌های سطر اول با $1, d_2, d_4, \dots$ و سطر دوم با d_1, d_3, d_5, \dots رابطه زیر به دست می‌آید:

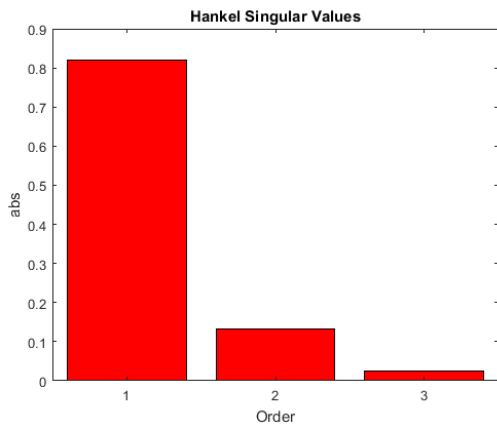
گام ۱: تفکیک سیستم ابعاد وسیع ناپایدار (۲۰) به دو بخش پایدار و ناپایدار.

$$G(s) = \frac{3.286s^2 + 10.14s + 13}{s^3 + 7s^2 + 14s + 7} - \frac{1.286s + 0.8571}{s^2 - 1.966 \times 10^{-16}s + 2.636 \times 10^{-6}} \quad (21)$$

گام ۲: در نظر گرفتن بخش پایدار رابطه (۲۰) به‌عنوان مدلی که قصد داریم مرتبه آن را کاهش دهیم.

$$G_{stable}(s) = \frac{3.286s^2 + 10.14s + 13}{s^3 + 7s^2 + 14s + 7} \quad (22)$$

گام ۳: رسم مقادیر تکین بخش پایدار سیستم ابعاد وسیع برای تعیین مرتبه مناسب سیستم مرتبه کاهشی.



شکل (۲): مقادیر تکین هانکل بخش پایدار سیستم نمونه ۱

همان‌طور که مشاهده می‌شود مدهای ۲ و ۳ نسبت به مد ۱ انرژی بسیار کمتری دارند و در نتیجه، از مدهای ۲ و ۳ می‌توان صرف‌نظر کرد؛ بنابراین، مرتبه مدل کاهش مرتبه یافته ۱ است.

گام ۴: انتخاب ساختار مناسبی با ضرایب مجهول با توجه به مرتبه به‌دست‌آمده.

$$G_{r-stable}(s) = \frac{c_1}{s + d_1} \quad (23)$$

گام ۵: کمینه‌سازی تابع برازش (۱۸) با استفاده از الگوریتم خفایش برای تعیین پارامترهای مجهول رابطه (۲۳).

$$G_{r-stable}(s) = \frac{1.44986}{s + 0.78069} \quad (24)$$

گام ۶: افزودن بخش ناپایدار به بخش پایدار کاهش مرتبه یافته برای دستیابی به مدل کاهش مرتبه کل.

گفتنی است در کاهش مرتبه سیستم‌های ناپایدار به‌طور کلی دو رهیافت وجود دارد؛ رهیافت تجزیه و رهیافت انتقال. در روش انتقال، مدهای سیستم ناپایدار به‌گونه‌ای انتقال داده می‌شوند که سیستم پایدار شود. سپس کاهش مرتبه سیستم پایدار بررسی می‌شود و در آخر، با عکس انتقال لحاظ‌شده، مدل ناپایدار کاهش مرتبه یافته به دست می‌آید؛ با این حال، با توجه به اینکه در روش انتقال مکان مدهای ناپایدار تغییر می‌کند، این روش نسبت به روش تجزیه از محبوبیت کمتری برخوردار است؛ در صورتی که در روش تجزیه مدهای ناپایدار تغییر نمی‌کنند.

روش پیشنهادی در گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

گام اول: تفکیک سیستم ابعاد وسیع ناپایدار به دو بخش پایدار و ناپایدار؛

گام دوم: در نظر گرفتن بخش پایدار برای کاهش مرتبه؛

گام سوم: انتخاب مرتبه مناسب برای مدل مرتبه کاهشی پایدار با استفاده از مفهوم مقادیر تکین هانکل؛

گام چهارم: انتخاب ساختار ثابت مناسبی همانند (۹) برای مدل مرتبه کاهشی که در آن c_i و d_i پارامترهای مجهول‌اند و باید تعیین شوند؛

گام پنجم: استفاده از الگوریتم خفایش برای تعیین پارامترهای مجهول مدل مرتبه کاهشی پایدار با کمینه‌سازی تابع برازش مقید (۱۸)؛

گام ششم: افزودن بخش ناپایدار به بخش کاهش مرتبه پایدار برای دستیابی به مدل مرتبه کاهشی ناپایدار.

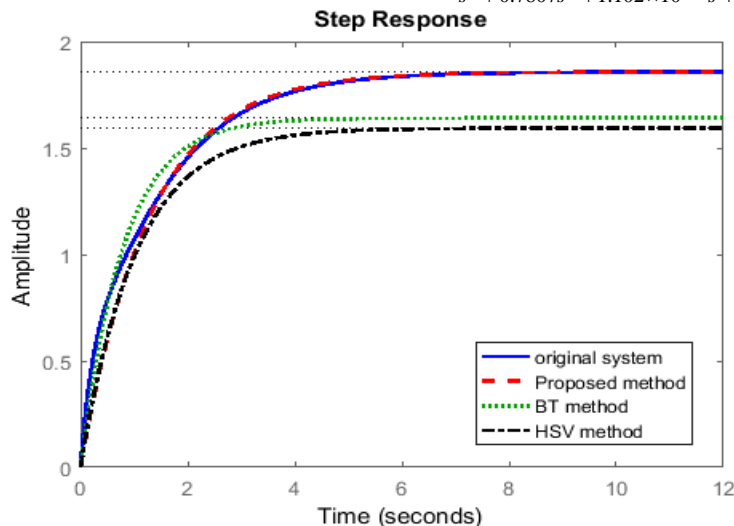
۴- شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش برای تأیید عملکرد و توانایی روش پیشنهادی، سه سیستم ناپایدار ابعاد وسیع کاهش مرتبه داده شده‌اند. به‌منظور فهم بهتر و آسان‌تر روش پیشنهادی، مثال اول به‌صورت مرحله به مرحله توضیح داده شده است.

مثال ۱: سیستم ناپایدار از مرتبه ۵ را در نظر بگیرید که در [۳۶] ارائه شده است:

$$G(s) = \frac{2s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 6}{s^2(s^3 + 7s^2 + 14s + 7)} \quad (20)$$

$$G_r(s) = \frac{0.1642s^2 - 0.1466s + 0.6692}{s^3 + 0.7807s^2 + 1.102 \times 10^{-16}s + 2.058 \times 10^{-6}} \quad (25)$$

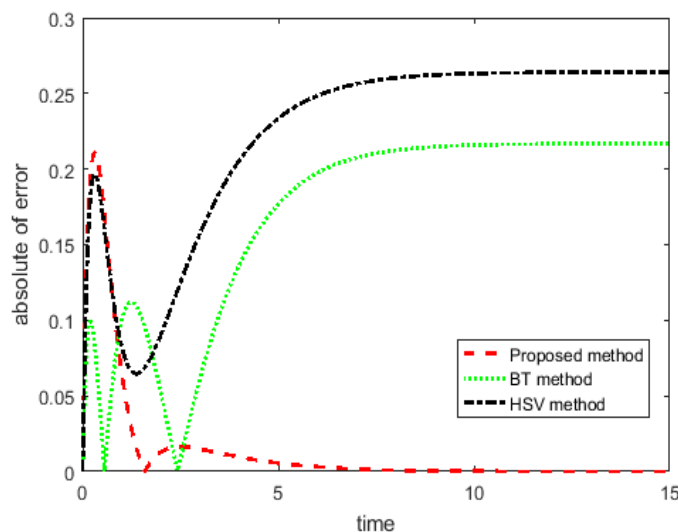


شکل (۳): پاسخ پله بخش پایدار سیستم اصلی و بخش پایدار کاهش مرتبه یافته با روش پیشنهادی و برخی

روش‌های کلاسیک کاهش مرتبه

سیستم اصلی بسیار نزدیک‌تر است. در جدول (۱) برخی مشخصه‌های مهم سیستم از قبیل مقدار حالت ماندگار، زمان صعود، زمان نشست و بیشینه فرجهش مقایسه شده‌اند. همچنین، معیار انتگرال حاصل ضرب زمان در مربع خطا و نرم H_∞ بررسی شدند که تابع هدف در کمینه‌سازی در نظر گرفته شده‌اند.

برای نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهادی، پاسخ پله بخش پایدار و بخش پایدار کاهش مرتبه یافته با روش پیشنهادی، با دیگر روش‌های رایج کاهش مرتبه از قبیل برش متعادل (BT) [۳۷] و روش تقریب هانکل (HSV) [۳۷] مقایسه شده است. با توجه به شکل‌های (۳) و (۴) مشاهده می‌شود مشخصه‌های مدل به‌دست آمده با روش پیشنهادی نسبت به روش‌های کلاسیک کاهش مرتبه به



شکل (۴): نمودار اندازه خطا برای بخش پایدار سیستم اصلی و بخش پایدار کاهش مرتبه یافته با روش پیشنهادی و روش‌های برش

متعادل و روش تقریب هانکل برای مثال ۱

جدول (۱): مقایسه مشخصه‌های بخش پایدار سیستم ابعاد وسیع و مدل کاهش مرتبه یافته آن برای مثال ۱

نرم H_∞	مقدار حالت ماندگار به ورودی پله واحد	بیشینه فراجهش (%)	زمان صعود (ثانیه)	زمان نشست (ثانیه)	انتگرال حاصل ضرب زمان در مربع خطا (ITSE)	مقدار حالت ماندگار به ورودی پله واحد
۱/۸۵۷۱	۱/۸۶	۰	۲/۹۹۰۲	۵/۱۹۷۰	-	سیستم اصلی
۱/۸۵۷۱	۱/۸۶	۰	۲/۸۱۴۲	۵/۰۱۱۰	۲۳/۷۰۰۴	روش پیشنهادی
۱/۶۴۰۳	۱/۶۴	۰	۱/۷۵۵۴	۳/۱۲۵۸	۱۱۴۲/۸	برش متعادل
۱/۵۹۳۰	۱/۵۹	۰	۲/۲۶۶۲	۴/۰۳۵۳	۱۷۵۲/۷	هانکل

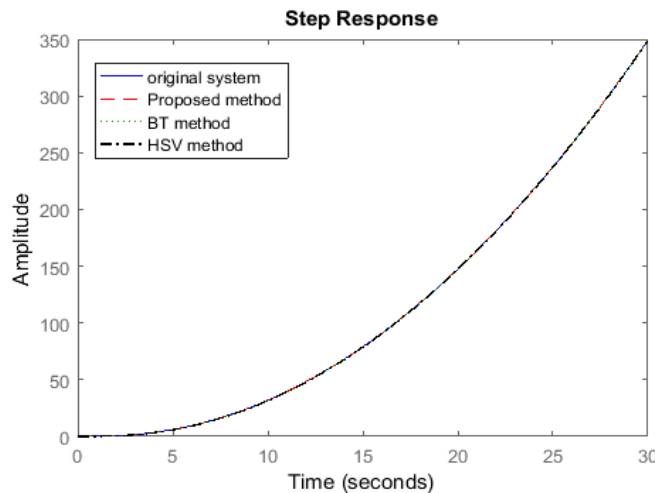
کاهش داده شده است؛ درحالی‌که در روش پیشنهادی مرتبه مدل کاهش مرتبه یافته ۳ شد و از همین رو در مقایسه عملکرد روش‌های کاهش مرتبه، روش پیشنهادشده در [۳۶] بررسی نشد.

مثال ۲: تابع انتقال ناپایدار و ناکمینه فاز از مرتبه ۴ ارائه شده در [۱۶] را در نظر بگیرید:

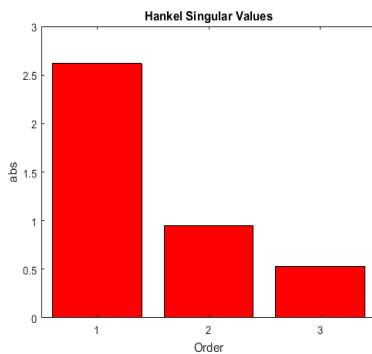
$$G(s) = \frac{60s^3 + 25850s^2 + 685000s - 2500000}{s^4 + 105s^3 + 10450s^2 + 45000s - 500000} \quad (26)$$

با توجه به شکل‌های (۳) و (۴) و همچنین، جدول (۱) مشاهده می‌شود روش پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌های کاهش مرتبه، عملکرد مشابه‌تر و مشخصه‌های نزدیک‌تری به بخش پایدار سیستم اصلی دارد. در ادامه، با افزودن بخش ناپایدار به بخش پایدار کاهش مرتبه یافته با روش پیشنهادی و متعاقباً روش‌های کلاسیک کاهش مرتبه از قبیل BT و HSV، پاسخ پله سیستم ناپایدار مقایسه شده است.

شایان ذکر است که در [۳۶] مرتبه سیستم ناپایدار به ۴



شکل (۵): پاسخ پله سیستم ناپایدار ابعاد وسیع و مدل‌های کاهش مرتبه یافته برای مثال ۱



شکل (۶): مقادیر تکین بخش پایدار سیستم مثال ۲

با توجه به روش پیشنهادی باید سیستم ناپایدار (۲۶) را به دو بخش پایدار و ناپایدار تفکیک کنیم.

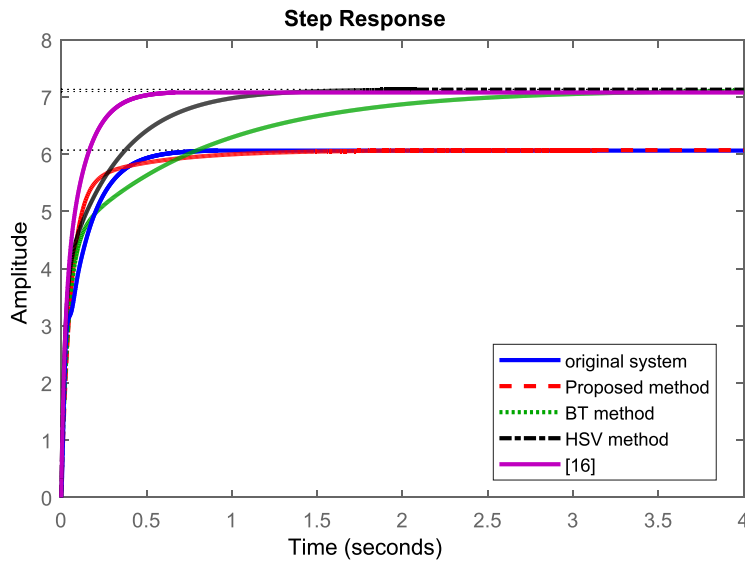
$$G(s) = \frac{24.75s^2 + 2.208 \times 10^4 s + 4.326 \times 10^5}{s^3 + 111.4s^2 + 1.116 \times 10^4 s + 7.126 \times 10^4} + \frac{35.25}{s - 6.385} \quad (27)$$

سپس مقادیر تکین هانکل بخش پایدار سیستم ابعاد وسیع (۲۶) را رسم می‌کنیم تا ابعاد بخش مرتبه کاهشی پایدار تعیین شود.

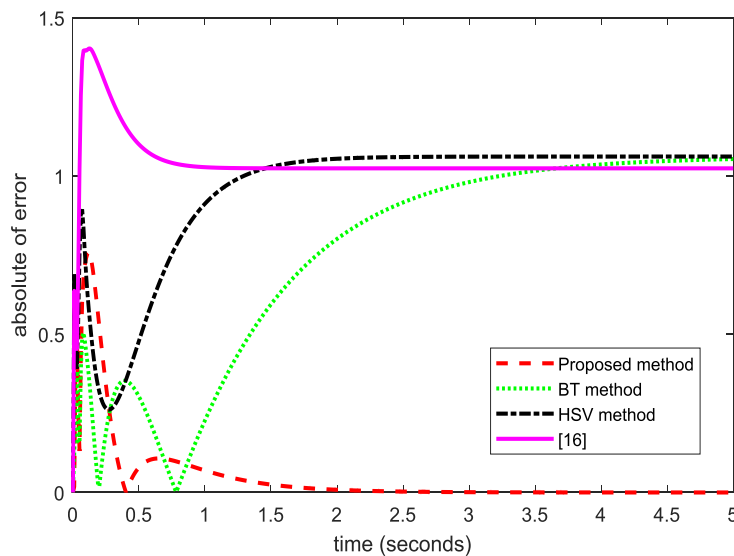
پاسخ پله بخش پایدار سیستم ابعاد وسیع و مدل مرتبه کاهشی متناظر به دست آمده با روش پیشنهادی، روش های BT و HSV و روش پیشنهادی [۱۶] در شکل (۷) نشان داده شده اند. همچنین در شکل (۸)، نمودار اندازه خطا بر حسب زمان نشان داده شده است که با توجه به آن، به وضوح مشاهده می شود روش پیشنهادی نسبت به دیگر روش های کاهش مرتبه کلاسیک خطای بسیار کمتری دارد.

با توجه به شکل (۶) مشاهده می شود مود ۳، انرژی کمی دارد و از آن چشم پوشی می شود؛ بنابراین، مرتبه مدل پایدار کاهشی ۲ انتخاب می شود. با انتخاب ساختار ثابت مناسب با ضرایب مجهول و اعمال گام های ۴ تا ۵ به مدل پایدار مرتبه کاهشی (۲۸) دست می یابیم:

$$G_{r-stable}(s) = \frac{100s + 238.7231}{s^2 + 20.3381s + 39.3275} \quad (28)$$



شکل (۷): پاسخ پله بخش پایدار سیستم اصلی و بخش پایدار کاهش مرتبه یافته با روش پیشنهادی و برخی روش های کلاسیک کاهش مرتبه برای مثال ۲



شکل (۸): نمودار اندازه خطا برای بخش پایدار سیستم اصلی و بخش پایدار کاهش مرتبه یافته با روش پیشنهادی و روش های برش متعادل (BT)، روش تقریب هانکل (HSV) و روش [۱۶] برای مثال ۲

۵۴ کاهش مرتبه سیستم‌های ناپایدار با استفاده از کمینه‌سازی تابع چندهدفه مجموع وزنی ITSE و نرم H_∞ با ...

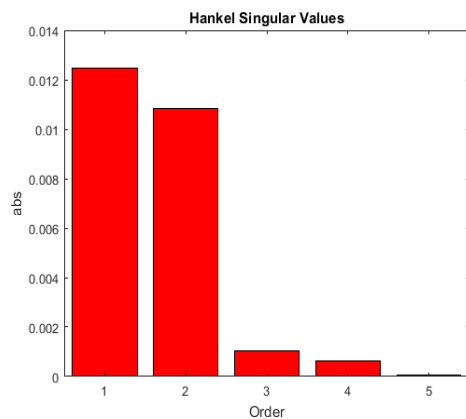
$$G_r(s) = \frac{135.2s^2 + 317.1s - 138}{s^3 + 13.95s^2 - 90.53s - 251.1} \quad (29)$$

با توجه به جدول (۲) و شکل‌های (۷-۸) مشاهده می‌شود روش پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌های کاهش مرتبه، دقت و عملکرد بهتری دارد.

در جدول (۲)، مشخصه‌های بخش پایدار سیستم اصلی و مدل‌های کاهش مرتبه یافته متناظر با بخش پایدار مقایسه شده‌اند. در ادامه، بخش ناپایدار تفکیک شده در رابطه (۲۷)، به بخش پایدار کاهش مرتبه یافته افزوده می‌شود تا مدل کاهش مرتبه یافته نهایی تعیین شود.

جدول (۲): مقایسه مشخصه‌های بخش پایدار سیستم ابعاد وسیع و مدل کاهش مرتبه یافته آن برای مثال ۲

نرم H_∞	مقدار حالت ماندگار به ورودی پله واحد	بیشینه فراجشش (%)	زمان صعود (ثانیه)	زمان نشست (ثانیه)	انتگرال حاصل ضرب زمان در مربع خطا (ITSE)	سیستم اصلی
۶/۰۷۰۱	۶/۰۷	۰	۰/۲۷۷۵	۰/۵۲۱۱	-	سیستم اصلی
۶/۰۷۰۱	۶/۰۷	۰	۰/۱۸۱۶	۰/۷۷۱۵	۸۵/۱۲۶۲	روش پیشنهادی
۷/۱۳۱۴	۷/۱۳	۰	۱/۱۳۱۳	۲/۵۱۴۱	۲۹۸۹۴	برش متعادل
۷/۱۳۱۴	۷/۱۳	۰	۰/۵۰۰۲	۱/۰۲۳۸	۳۱۲۶۴	هانکل
۷/۰۹۴۲	۷/۰۹	۰	۰/۲۰۵۲	۰/۴۰۴۴	۳۰۰۷۷	روش [۱۶]



شکل (۹): مقادیر تکین بخش پایدار سیستم مثال ۲

با توجه به شکل (۹) مشاهده می‌شود مرتبه مناسب بخش پایدار مرتبه کاهش ۲ است. با کمینه‌سازی تابع هدف ارائه شده در (۱۸) با استفاده از الگوریتم خفاش به مدل مرتبه کاهش یافته از رابطه (۳۱) دست می‌یابیم.

$$G_{r-stable}(s) = \frac{-0.01186s - 0.06798}{s^2 + 0.6991s + 28.88} \quad (33)$$

برای بررسی دقت و کارایی روش پیشنهادی، در شکل (۱۰) پاسخ پله بخش پایدار به دست آمده با روش پیشنهادی و برخی روش‌های کلاسیک از قبیل BT و HSV و روش [۳۸] مقایسه شده‌اند. برای بررسی بیشتر نیز نمودار اندازه خطا برحسب زمان در شکل (۱۱) نشان داده شده است.

مثال ۳: سیستم ناپایدار از مرتبه ۷ ارائه شده توسط یانگ در [۳۸] را در نظر بگیرید.

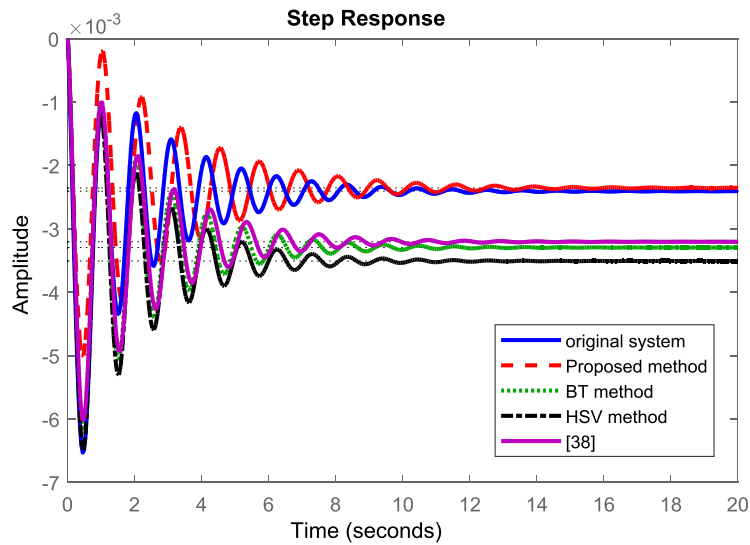
$$G(s) = \frac{2.5s^3 + 1.48s^2 + 2.56s + 1.83}{s^7 + 5.3s^6 + 62.94s^5 + 261.16s^4 + 1063.1s^3 + 3080.9s^2 + 5870.8s + 2283.6} \quad (30)$$

با تفکیک سیستم (۳۰) به دو بخش پایدار و ناپایدار، بخش پایدار و ناپایدار به ترتیب به صورت (۳۱) و (۳۲) خواهند بود.

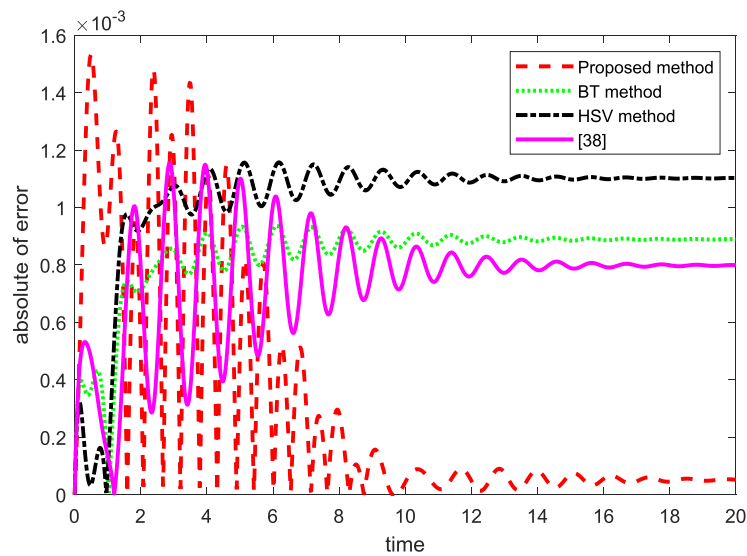
$$G_{stable}(s) = \frac{-0.01482s^4 - 0.1479s^3 - 0.9012s^2 - 1.171s - 0.3414}{s^5 + 5.9s^4 + 50.39s^3 + 196.4s^2 + 370.2s + 141.9} \quad (31)$$

$$G_{unstable} = \frac{0.01482s + 0.0516}{s^2 - 0.5997s + 16.09} \quad (32)$$

در این بخش، مقادیر تکین هانکل رسم شده است تا مرتبه سیستم مرتبه کاهش یافته تعیین شود.



شکل (۱۰): پاسخ پله بخش پایدار سیستم اصلی و بخش پایدار کاهش مرتبه یافته با روش پیشنهادی و برخی روش‌های کلاسیک کاهش مرتبه برای مثال ۳



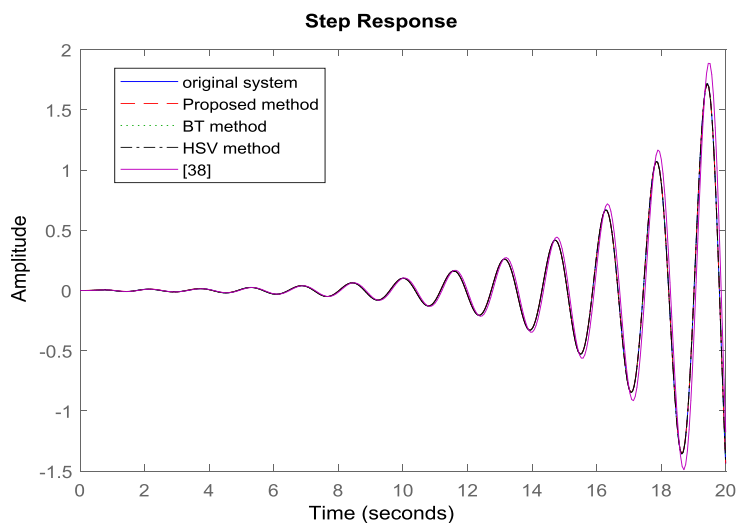
شکل (۱۱): نمودار اندازه خطا برای بخش پایدار سیستم اصلی و بخش پایدار کاهش مرتبه یافته با روش پیشنهادی و روش‌های برش متعادل (BT)، روش تقریب هانکل (HSV) و روش [۳۸] برای مثال ۳

جدول (۳): مقایسه مشخصه‌های بخش پایدار سیستم ابعاد وسیع و مدل کاهش مرتبه یافته آن برای مثال ۳

نرم H_∞	مقدار حالت ماندگار به		زمان صعود (ثانیه)	بیشینه فراجشش (%)	زمان نشست (ثانیه)	انتگرال حاصل ضرب زمان در مربع خطا (ITSE)	سیستم اصلی
	ورودی پله واحد	فراجشش (%)					
۰/۰۲۴۶	-۰/۰۰۲۴۱	۱۷۱/۴۳۷۱	۰/۱۰۶۸	۸/۹۲۰۷	-		سیستم اصلی
۰/۰۲۴۸	-۰/۰۰۲۳۵	۱۱۲/۳۸۹۰	۰/۱۲۶۷	۱۱/۶۰۸۸	۰/۰۰۲۶		روش پیشنهادی
۰/۰۲۴۰	-۰/۰۰۳۲۹	۸۶/۸۲۷۶	۰/۱۵۵۰	۸/۴۵۹۱	۰/۰۰۷۴		برش متعادل
۰/۰۲۳۹	-۰/۰۰۳۵۱	۸۴/۸۵۵۹	۰/۱۵۸۴	۷/۹۲۴۰	۰/۰۱۱۴		هانکل
۰/۰۲۳۲	-۰/۰۰۳۲	۸۷/۶۱۳۸	۰/۱۵۶۰	۸/۶۵۷۷	۰/۰۰۶۲		روش [۳۸]

به دست می‌آید. برای بررسی کارایی و دقت مدل مرتبه کاهشی نهایی، در شکل (۱۲) پاسخ پله سیستم ابعاد وسیع و مدل‌های نهایی به دست آمده با روش پیشنهادی و برخی روش‌های کاهش مرتبه نشان داده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند روش پیشنهادی بیشترین تشابه با مدل ناپایدار اصلی را دارد.

در جدول (۳)، مشخصه‌های اصلی مدل‌های مرتبه کاهشی به دست آمده با بخش پایدار سیستم ابعاد وسیع مقایسه شده‌اند. با توجه به شکل‌های (۱۰) و (۱۱) و جدول (۳) به وضوح مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده با روش پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌های کاهش مرتبه، دقت و کارایی بهتری دارند. در ادامه، با افزودن بخش ناپایدار به بخش پایدار مرتبه کاهشی، مدل نهایی سیستم مرتبه کاهشی



شکل (۱۲): پاسخ پله سیستم ناپایدار ابعاد وسیع و مدل‌های کاهش مرتبه یافته برای مثال ۳

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی مبتنی بر کمینه‌سازی تابع دو هدفه مجموع وزنی معیارهای ITSE و نرم H_∞ با استفاده از الگوریتم خفایش، برای کاهش مرتبه سیستم‌های ابعاد وسیع ناپایدار ارائه شد. پس از تفکیک سیستم ابعاد وسیع ناپایدار به دو بخش پایدار و ناپایدار، با بررسی مقادیر تکین هانکل بخش پایدار، مرتبه بخش پایدار مدل مرتبه کاهشی تعیین شده است. با انتخاب ساختاری ثابت با ضرایب مجهول و کمینه‌سازی تابع برازش با استفاده از الگوریتم خفایش، با توجه به محک روث به عنوان قید، مدل مرتبه کاهشی بخش پایدار تعیین شده است. در آخر، با افزودن بخش ناپایدار به بخش کاهش مرتبه یافته، مدل کاهش مرتبه یافته نهایی به دست آمده است. توانمندی و کارایی روش پیشنهادی با مقایسه نتایج به دست آمده با برخی روش‌های رایج کاهش مرتبه از قبیل برش متعادل و روش تقریب هانکل نشان داده شده است.

منابع

- [1] E.J. Davison, "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 11, pp. 93-101, 1966.
- [2] C.F. Chen, L.S. Shieh, "A Novel Approach to Linear Model Simplification", Int. J. Control, Vol. 8, pp. 561-570, 1968.
- [3] D.A. Wilson, "Optimal Solution of Model Reduction Problem", Proceedings on IEE, Vol. 117, 1970.
- [4] D.A. Wilson, "Model Reduction for Multivariable Systems", International Journal of Control, Vol. 20, pp. 57-64, 1974.
- [5] Y. Shamash, "Model Reduction Using the Routh Stability Criterion and Pade Approximation Technique", Int. J. Control, Vol. 21, No. 3, pp. 475-484, 1975.
- [6] R.A. El-Attar, M. Vidyasagar, "Order Reduction by L_1 and L_∞ Norm Minimization", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 23, No. 4, pp. 731-734, 1978.
- [7] G. Obinata, H. Inooka, "Authors Reply to Comments on Model Reduction by Minimizing the Error", IEEE Trans. Automati Control, Vol. 28, pp. 124-125, 1984.
- [8] B.C. Moore, "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction", IEEE Transactions on

- [23] P. Duff, P. Goyal, P. Benner, "Balanced Truncation for a Special Class of Bilinear Descriptor Systems", *IEEE Control Systems Letters*, Vol. 3, no. 3, pp. 535-540, 2019.
- [24] S. Ibrir, " H_2 - Galerkin Projection Method for Model Order Reduction of Linear and Nonlinear Systems", *IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control*, Melbourne, Australia, pp. 3805-3810, 2017.
- [25] S. Ibrir, "A Projection-Based Algorithm for Model-Order Reduction with H_2 Performance: A Convex-Optimization Setting", *Automatica*, Vol. 93, pp. 510-519, 2018.
- [26] M. I. Ahmad, U. Baur, P. Benner, "Implicit Volterra Series Interpolation for Model Reduction of Bilinear Systems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 316, pp. 15-28, 2017.
- [27] M.I. Ahmad, P. Benner, P. Goyal, "Krylov Subspace-Based Model Order Reduction for a Class of Bilinear Descriptor Systems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 315, pp. 303-318, 2017.
- [28] M. Vakilzadeh, M. Eghtesad, R. Vatankhah, M. Mahmoodi, "A Krylov on Multi-Moment Matching for Model Order Reduction of Large Scale Second Order Bilinear Systems", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 60, pp. 739-757, 2018.
- [29] S. Yang Xin, "A New Methaheuristic Bat-Inspired Algorithm", *Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, pp. 65-74.
- [30] A. Es, "Optimization of Power System Stabilizers Using BAT Search Algorithm", *Int. J. Electr Power Energy Systems*, Vol. 6, No. 1, pp. 683-690, 2014.
- [31] F. Rashidi, "Private Investor-based Transmission Expansion Planning in a Deregulated Environment Using Pareto Bat Inspired Algorithm", *Computational Intelligence in Electrical Engineering*, Vol. 8, No. 3, pp. 25-45, 2017.
- [32] M. Elsis, M. Soliman, M.A.S. Aboelela, W. Mansour, "Bat Inspired Algorithm Based Optimal Design of Model Predictive Load Frequency Control", *Int. J. Electr Power and Energy Systems*, Vol. 83, pp. 426-433, 2016.
- [33] Q. Liu, L. Wu, W. Xiao, F. Wang and L. Zhang, "A Novel Hybrid Bat Algorithm for Solving Continuous Optimization Problems", *Applied Soft Computing Journal*, 2018.
- [34] R. Kotteeswaran and L. Sivakumar, "A Novel Bat Algorithm Based Re-Tuning of PI Controller of Coal Gasifier for Optimum Response," in *Mining Intelligence and Knowledge Exploration*, vol. 8284, *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 506-517, Springer, Allschwil, Switzerland, 2013.
- [35] P.C. Parks, "A New Proof of the Routh-Hurwitz Stability Criterion Using the Second Method of Lyapunov", *Proc. Camb. Philos. Soc.*, Vol. 58, No. 4, pp. 694-702, 1962.
- [36] S.K. Mittal, D. Chandra, B. Dwivedi, "Improved Routh-Pade' Approximation Using Vector Evaluated Genetic Algorithm to Unstable Systems", *International Journal of Engineering and Applied Science*, Vol. 1, No.2, pp. 1-14, 2009.
- [37] S. Skogestad, I. Postethwaite, "Multivariable Automatic Control, Vol. 26, pp. 17-32, 1981.
- [9] K. Glover, "All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and their L_∞ Error Bounds", *Int. J. Control*, Vol. 39, pp. 1115-1193, 1984.
- [10] Y. Liu, B.D.O. Anderson, "Singular Perturbation Approximation of Balanced Systems", *International Journal of Control*, Vol. 50, pp. 1379-1405, 1989.
- [11] P. Feldman, R.W. Freund, "Efficient Linear Circuit Analysis by Padé Approximation Via a Lanczos Method", *IEEE Trans. Computer-Aided Des.* Vol. 14, pp. 639-649, 1995.
- [12] E. Grimme, "Krylov Projection Methods for Model Reduction", Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering, University of Illinois at Urbana Champaign, 1997.
- [13] M. Jamshidi, "Large Scale Systems: Modeling, Control and Fuzzy Logic", Prentice Hall, 1st edition, 1996.
- [14] V. Sreeram, B.D.O. Anderson, "Frequency Weighted Balanced Reduction Technique: A Generalization and an Error Bound", *Proceedings of 34th IEEE conferences on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, Vol. 4, pp. 3576-3581, 1995.
- [15] A. Zadegan, A. Zilouchian, "Controller Order Reduction Using Frequency Domain Balanced Structure", *Proc. World Auto. Congress*, Orlando, pp. 163-168, 2002.
- [16] S.L. Cheng, C. Hwang, "Optimal Approximation of Linear Systems by a Differential Evolution Algorithm", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, Vol. 31, No. 6, pp. 698-707, 2001.
- [17] G. Parmar, S. Mukherjee, R. Prasad, "Reduced Order Modelling of Linear Dynamic Systems using Particle Swarm Optimized Eigen Spectrum Analysis", *International Journal Computational and Mathematical Science*, Vol.1, No. 1, pp. 45-52, 2007.
- [18] H. Nasiri Soloklo, M. Maghfoori Farsangi, "Chebyshev Rational Functions Approximation for Model Order Reduction Using Harmony Search", *Scientia Iranica*, Vol. 30, No. 3, pp. 771-777, 2013.
- [19] H. Nasiri Soloklo, R. HajMohammadi, M. Maghfoori Farsangi, "Model Order Reduction Based on Moment Matching Using Legendre Wavelet and Harmony Search Algorithm", *Iranian J of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, Vol. 9, No. E1, pp. 39-54, 2015.
- [20] H. Nasiri Soloklo, M. M. Farsangi, " Model Order Reduction Using Laguerre Polynomials and Harmony Search" *Computational Intelligence in Electrical Engineering*, Vol.5, No.1, pp.27-40, 2014.
- [21] P. Benner, P. Goyal, "Balanced Truncation Model Order Reduction for Quadratic Bilinear Control Systems", *arXiv e-prints*, 1705.00160, 2017.
- [22] S.S. Mohseni, M. J. Yazdanpanah, A. R. Noei, "Model Reduction of Nonlinear Systems by Trajectory Piecewise Linear Based on Output-Weighting Models: A Balanced Truncation Methodology", *Iran J Sci Technol Trans Electr Eng*, Vol. 42, pp. 195-206, 2018.

Xu, "Model Reduction of Unstable Systems",
International Journal of Systems Science, Vol. 24,
No. 12, pp. 2407-2414, 1993.

feedback control, analysis and design", John Wiley,
1996.

[38] J. Yang, C.S. Chen, J.A. De Abreu-Garcia, Y.

-
- ¹ Pade Approximation
 - ² Balanced Truncation (BT)
 - ³ Hankel
 - ⁴ Singular Perturbation (SP)
 - ⁵ Lancsoz
 - ⁶ Moments
 - ⁷ Krylov Subspace
 - ⁸ Differential Algorithm
 - ⁹ Particle Swarm Optimization
 - ¹⁰ Volterra
 - ¹¹ Hankel Singular Values (HSV)
 - ¹² Bat Algorithm
 - ¹³ Routh Criteria